

幾何学概論第二 (MTH.B212)

パラメータ変換・長さと面積

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/>

東京工業大学理学院数学系

2022/12/08

準備：3次元ユークリッド空間

\mathbb{R}^3 : 3次元ユークリッド空間.

- ▶ 内積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$.
- ▶ ベクトルの大きさ (ノルム) $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$.
- ▶ 2点の距離 $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$.

準備：等長変換

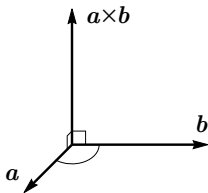
$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が等長変換 $\Leftrightarrow d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ ($\forall P, Q$)

- ▶ 3次直交行列全体の集合： $O(3)$.
- ▶ 3次直交行列のうち行列式が1のもの全体： $SO(3)$.
- ▶ f が等長変換 $\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ ($A \in O(3)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$)
- ▶ $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ ($A \in SO(3)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$)：向きを保つ等長変換.

準備：ベクトル積

\mathbf{a} , \mathbf{b} および $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$



準備：ベクトル積

- ▶ 双線形
- ▶ 交代的
- ▶ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ が一次独立 $\Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.
- ▶ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$.
- ▶ $A \in \text{SO}(3) \Rightarrow (A\mathbf{a}) \times (A\mathbf{b}) = A(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- ▶ $A \in \text{O}(3) \setminus \text{SO}(3) \Rightarrow (A\mathbf{a}) \times (A\mathbf{b}) = -A(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- ▶ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

準備：チェーン・ルール

- ▶ f : 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞ -級関数
- ▶ $\gamma: \mathbb{R} \supset (a, b) \ni t \mapsto \gamma(t) = {}^t(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2 : C^\infty$
- ▶ $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t) \frac{\partial f}{\partial u}(u(t), v(t)) + \frac{dv}{dt}(t) \frac{\partial f}{\partial v}(u(t), v(t)).$$

すなわち

$$\dot{\hat{\gamma}} = (f_u, f_v)\dot{\gamma}$$

準備：チェイン・ルール

▶ $\varphi: \mathbb{R}^2 \supset V \ni {}^t(\xi, \eta) \mapsto \varphi(\xi, \eta) = {}^t(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \in \mathbb{R}^2 : C^\infty$

▶ $\gamma: \mathbb{R} \supset (a, b) \ni t \mapsto \gamma(t) = (\xi(t), \eta(t)) \in V : C^\infty$

▶ $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma.$

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(*), \frac{\partial u}{\partial \eta}(*), \frac{\partial v}{\partial \xi}(*), \frac{\partial v}{\partial \eta}(*), \frac{d\xi}{dt}(t), \frac{d\eta}{dt}(t) \right)$$

ただし $(*) = (\xi(t), \eta(t)).$ すなわち

$$\dot{\tilde{\gamma}} = P\dot{\gamma}, \quad \left(P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right).$$

準備：チェイン・ルール

- ▶ f : 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞ -級関数
- ▶ $\varphi: \mathbb{R}^2 \supset V \ni (\xi, \eta) \mapsto \varphi(\xi, \eta) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \in \mathbb{R}^2 : C^\infty$
- ▶ $\tilde{f} = f \circ \varphi$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{\partial f}{\partial u}(\ast) + \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{\partial f}{\partial v}(\ast)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) \frac{\partial f}{\partial u}(\ast) + \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, \eta) \frac{\partial f}{\partial v}(\ast)$$

ただし $(\ast) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$. すなわち

$$(\tilde{f}_\xi, \tilde{f}_\eta) = (f_u, f_v)P \quad \left(P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right)$$

準備：微分同相

定義

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から領域 $V \subset \mathbb{R}^2$ への全単射 $\varphi: U \rightarrow V$ が微分同相写像であるとは、 φ と φ^{-1} がともに C^∞ -級となることである。これを座標変換ということもある。

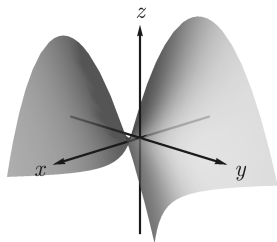
定理 (逆写像定理)

- ▶ 微分同相写像 $\varphi: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列は U の各点で正則行列。すなわちヤコビ行列式 (ヤコビアン) は零でない。
- ▶ C^∞ -級写像 $\varphi: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列が点 $P \in U$ で正則ならば、 P の近傍 U_0 が存在して、 $\varphi|_{U_0}: U_0 \rightarrow \varphi(U_0)$ は微分同相となる。

ユークリッド空間の曲面

例

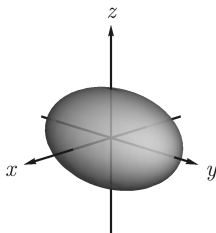
グラフ： $z = f(x, y)$



ユークリッド空間の曲面

例

陰関数： $F(x, y, z) = 0$



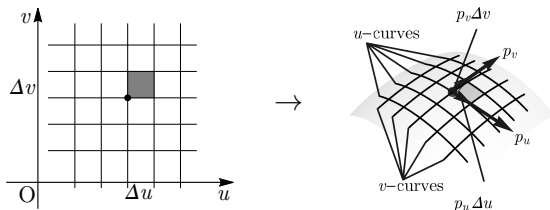
正則曲面

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から \mathbb{R}^3 への C^∞ -級写像

$$p: U \ni (u, v) \mapsto p(u, v) = {}^t(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

が曲面の正則パラメータ表示または正則曲面

$\iff U$ の各点 (u, v) において $p_u(u, v), p_v(u, v)$ が一次独立.



正則曲面

$$(x, y) \mapsto {}^t(x, y, f(x, y))$$

正則曲面

${}^t(x(t), z(t))$: xz 平面上の正則曲線 ; $x(t) > 0$.

$$p(u, v) = {}^t(x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v)).$$

注意

- ▶ 定義域の問題
- ▶ 自己交叉
- ▶ パラメータのとり方

