幾何学概論第二 (MTH.B212)

パラメータ変換・長さと面積

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/12/08 (2022/12/08 訂正)

パラメータ変換

$U, V \subset \mathbb{R}^2$：領域

- $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2$：微分同相

主張

$\tilde{p}\colon = p \circ \varphi$ は正則曲面

$\tilde{p}$ は p からパラメータ変換 φ で得られる．

弧長

- $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\gamma\colon [a,b] \to U \subset \mathbb{R}^2$：$C^\infty$-級.
- $\hat{\gamma} = p \circ \gamma$.

Definition

$$\mathcal{L}(\hat{\gamma}) := \int_a^b \left| \frac{d\hat{\gamma}}{dt} \right| dt.$$

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dt} = \dot{u} p_u + \dot{v} p_v = (p_u, p_v)\dot{\gamma} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right).$$

弧長

主張

- 曲面上の曲線の弧長は曲線のパラメータのとり方によらない.
- 曲面上の曲線の弧長は $\mathbb{R}^3$ の等長変換で不変.
- 曲面上の曲線の弧長は曲面のパラメータのとり方によらない.

面積

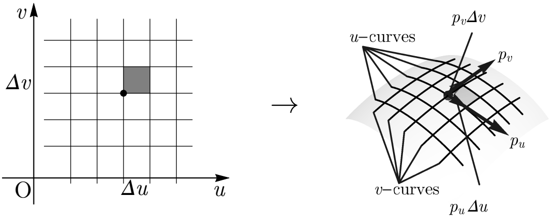
- $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $D \subset U$：部分領域で $\overline{D}$ が有界閉集合となるもの.

定義

$$\mathcal{A}_p(\overline{D}) := \iint_{\overline{D}} |p_u \times p_v| \, du \, dv$$

面積

$$\mathcal{A}_p(\overline{D}) := \iint_{\overline{D}} |p_u \times p_v| \, du \, dv$$



面積

$$\mathcal{A}_p(\overline{D}) := \iint_{\overline{D}} |p_u \times p_v| \, du \, dv$$

主張

- 面積は $\mathbb{R}^3$ の等長変換で不変.
- 面積は曲面のパラメータのとり方によらない.

問題 1-1

問題

写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $p(u,v) := {}^t(v, 3u^4 + u^2 v, 4u^3 + 2uv)$ で定める．$\mathbb{R}^2$ の部分集合で次を満たす最大のものを求めなさい：

- $p(u,v) = p(u',v')$，$(u,v) \neq (u',v')$ となる (u',v') が存在するような (u,v) の集合．
- 点 ${}^t(0,1)$ を含み，$p|_U$ が正則曲面を与えるような領域 U.

問題 1-2

問題

領域 $D := (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上で定義された正則曲面
$p\colon D \ni (u,v) \mapsto p(u,v) := {}^t\!\big(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\big) \in \mathbb{R}^3$ に
$u = \xi$, $v = v(\eta)$ という形のパラメータ変換を施して,
$\tilde{p}(\xi,\eta) = p\big(\xi, v(\eta)\big)$ が $|\tilde{p}_\xi| = |\tilde{p}_\eta|$, $\tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta = 0$ を満たすような
$\tilde{p}(\xi,\eta)$ を求めなさい.

問題 1-3

問題

正の定数 a に対して正則曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $p(u,v) := {}^t\left(a\cos v\cosh\frac{1}{a}u, a\sin v\cosh\frac{1}{a}u, u\right)$ で定める．正の数 δ に対して $S(\delta) := \{p(\delta, v);\ -\pi \leqq v \leqq \pi\}$, $D(\delta) := \{p(u,v);\ -\delta \leqq u \leqq \delta,\ -\pi \leqq v \leqq \pi\}$ とするとき，$S(\delta)$ の弧長と $D(\delta)$ の面積を求めなさい．