2022 年 12 月 8 日 (2022 年 12 月 15 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 1

講義概要

■重要なポインタ

- `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/` （この授業の公式ページ）
- `http://www.official.kotaroy.com/class/2022/geom-2/` （この授業のページ; ミラーサイト）
- `http://t2schola.titech.ac.jp` (T2SCHOLA; 講義資料，課題の提出，返却はこちら)

■科目名など　幾何学概論第二 (MTH.B212; 理学院数学系対象)
木曜日・3/4 時限; 10:45–12:25; 本館 H116 講義室

■担当者　山田光太郎 (kotaro@math.titech.ac.jp)

■講義の概要　MTH.B211 幾何学概論第一に続き，主に以下の事項を学ぶ：正則曲面のパラメータ表示，第一基本形式・長さ・角度・面積, 第二基本形式・主曲率・Gauss 曲率・平均曲率，測地線，Gauss-Bonnet の定理，曲面論の基本定理の意味．古典的な曲面の微分幾何学の基本事項を身につけるとともに，現代の微分幾何学を学ぶための準備を行う．

■到達目標　3 次元ユークリッド空間内の曲面の微分幾何学の基本的な事項，とくに，曲面の曲率の概念と，その幾何学的な性質を学ぶ．(1) 曲面のパラメータ表示とパラメータ変換，パラメータによらない量の概念を知る．(2) 曲面の曲率と曲面の形状の関係を知る．(3) 曲面の大域的性質と局所的性質の具体例を知る．(4) 理論の具体例を計算によって確認する．

■教科書　梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面』(改訂版)（裳華房）
　正誤表：`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html`

■授業の進め方

- 全学の方針により対面にて講義を行う．ただし，対面講義への出席を評価の対象にはしない．
- 講義前日までに T2SCHOLA に講義資料および映写資料をおく．事前に閲覧できるようにしておくこと．なお**紙媒体による資料配布は行わない**.
- 復習のため講義の録画を行う．録画は zoom を用いるが，対面授業の原則に従い，url は公開しない．
- 板書および zoom 上の録画 url は原則として授業の翌日中には公開する．なお，録画が失敗する可能性もあるが，その際の代替処置の用意はない．
- 日程の変更などは T2SCHOLA よりアナウンスする．
- **台風・積雪**などにより，通学が困難になる可能性がある場合は**全学の決定に先立って**授業変更（オンラインに変更・または休講）を通知することがある．

■成績評価の方法

- 第 1 回から第 6 回までの授業で提示された**課題**を 1 回あたり 5 点満点で評価する．
- 定期試験期間中に**試験**（100 点満点）を行う予定．詳細は試験実施の 2 週間前の講義の際に指示する．試験を受験することは単位を得るための**必要条件**である (十分条件ではない)．
- 成績は**試験**と**課題**の得点から決定する．決定の方式は次の通り：課題の得点の合計を x 点 ($0 \leqq x \leqq 30$)，課題得点のクラス最大値を $x_{\max}$ 点，試験の得点を y 点（$0 \leqq y \leqq 100$）としたとき，

$$Z := 5 \times \left[\frac{z}{5}\right], \qquad z := (1-p)\left(\frac{100x}{x_{\max}}\right) + py, \qquad p := 0.3 + 0.7a$$

で与えられる Z と 100 のうち大きくない方を評価点とする（予定；**変更の場合は定期試験予告以前に通知する**）．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数，係数 $a \in [0,1]$ は**試験答案提出時に受講者自身が決める定数**である．

■課題とその評価方法

1 講義の際に提示する問題のうちから 1 問を選んで回答する． **２点満点**

2 講義内容，講義資料の**誤りの指摘**または**質問３点満点**.

- 評価基準：基本点**２点**；計算・議論を自分で追わないと見つけられないような誤りの指摘・質問は**３点**；同一の指摘が 5 件以上あるものは**１点減点**；講義内容と無関係，高校生程度の誤認，講義中に指摘した内容，文として成立しないものは**０点**.
- 複数の質問・誤りの指摘はそのうち**最高点**のものを評価点とする．

■提出方法

- 所定の用紙（A4 版 2 枚）—提出用紙—に記入して PDF 形式で T2SCHOLA に提出．
- 講義 web ページ，T2SCHOLA に提出用紙の PDF 形式ファイルおよび LuaLaTeX ソース をおく．
- 採点の都合上，提出用紙のフォーマットの変更は不可．とくに，ファイルは **2 ページ**ちょうど，サイズは **A4**．PDF 文書の「プロパティ」でサイズが 210×297mm となっていれば問題ない．
- 電子ファイルでの提出は，見た目のフォーマットが同一であれば可．
- 提出期限は講義直後の**月曜日の 07 時 00 分（JST）**.
  なお，T2SCHOLA 上の受付停止は行わなず，提出のタイムスタンプで判断する．
- 提出物は次回の講義までに返却する；質問等には個人が特定できない形で回答する．

■PDF tips:

- PDF 文書が所定のサイズでない場合があります．たとえば，辺の長さが 2m くらい．写真を PDF 化するときに起きることがあるようです．この場合は，適当に用紙サイズを設定して「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります．
- オリジナルの提出用紙にタブレットなどで書き込みをして PDF 化した場合，作成環境により，ファイルを結合・分割すると書き込みが消えてしまうことがあるようです．PDF 化したファイルをもう一度 PDF リーダで読み込み，「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります．

1　パラメータ変換・長さと面積

■3 次元ユークリッド空間　3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の内積を "$\cdot$" で表す：$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}={}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$．これを用いてベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさを $|\boldsymbol{v}|:=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$ と定める．$\mathbb{R}^3$ の 2 点 P, Q の距離 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}):=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を保つ変換を**等長変換**または**合同変換**という．$\mathbb{R}^3$ の等長変換は $\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ の形に表される．ただし A は 3 次直交行列，$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$．とくに $\det A=1$ のとき，この等長変換を**向きを保つ等長変換**という．二つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のベクトル積（または外積）は，任意の $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ に対して $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ を満たすベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ として特徴付けられる．

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ が一次独立であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.
- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に直交する．
- $A\in\mathrm{SO}(3)$ に対して $(A\boldsymbol{a})\times(A\boldsymbol{b})=A(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$．ただし $\mathrm{SO}(3)$ は行列式が 1 の 3 次直交行列全体の集合．
- $A\in\mathrm{O}(3)\setminus\mathrm{SO}(3)$ に対して $(A\boldsymbol{a})\times(A\boldsymbol{b})=-A(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$．ただし $\mathrm{O}(3)$ は 3 次直交行列全体の集合．

■逆写像定理（多変数）　領域 $U\subset\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への C^∞-級写像 $\boldsymbol{f}={}^t(f_1,\dots,f_m)\colon U\to\mathbb{R}^m$ の点 P における**微分**とは，$(d\boldsymbol{f})_{\mathrm{P}}:\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{v}\mapsto\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\boldsymbol{f}(\mathrm{P}+t\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}^m$ のことである．ここで (m,n)-行列に値をもつ関数（$\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列）$D\boldsymbol{f}:=\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)$ を考えれば，$(d\boldsymbol{f})_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})=\big(D\boldsymbol{f}(\mathrm{P})\big)\boldsymbol{v}$ が成り立つので $(df)_{\mathrm{P}}$ は線形写像である．

定義 1.1. 領域 $U\subset\mathbb{R}^m$ から領域 $V\subset\mathbb{R}^m$ への全単射 $\Phi\colon U\to V$ が**微分同相写像**であるとは，Φ と Φ^{-1} がともに C^∞-級となることである．これを**座標変換**ということもある．

定理 1.2.
- 微分同相写像 $\Phi\colon\mathbb{R}^n\supset U\to V\subset\mathbb{R}^m$ の各点 P での微分 $(d\Phi)_{\mathrm{P}}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は全単射である．とくに $m=n$，かつヤコビ行列式 $\det D\Phi(\mathrm{P})$ は零でない．
- C^∞-級写像 $\Phi\colon\mathbb{R}^m\supset U\to\mathbb{R}^m$ のヤコビ行列 $D\Phi$ が点 $\mathrm{P}\in U$ で正則ならば，P の近傍 U_0 が存在して，$\Phi|_{U_0}\colon U_0\to\Phi(U_0)$ は微分同相写像となる．

■3 次元ユークリッド空間の曲面　領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への C^∞-級写像 $p\colon U\ni(u,v)\mapsto p(u,v)\in\mathbb{R}^3$ が**曲面の正則パラメータ表示**または**正則曲面**であるとは，U の各点 P において $p_u(\mathrm{P})$，$p_v(\mathrm{P})$ が一次独立となることである．

例 1.3.
- 領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 f のグラフは写像 $(x,y)\mapsto{}^t\big(x,y,f(x,y)\big)$ とみれば正則曲面．
- xz-平面上の正則曲線 $\gamma(t)={}^t\big(x(t),z(t)\big)$ がつねに $x(t)\neq 0$ を満たしているとき，$p(u,v)={}^t\big(x(v)\cos u,x(v)\sin u,z(v)\big)$ は正則曲面を与える（回転面）．
- テキスト 63 ページ．

このとき，さらに領域 $V\subset\mathbb{R}^2$ から領域 U への微分同相写像 $\varphi\colon V\ni(\xi,\eta)\mapsto\big(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\big)\in U$ が与えられれば，合成写像 $\tilde{p}:=p\circ\varphi\colon V\to\mathbb{R}^3$ は正則曲面を与え，その像は p の像と一致する：$p(U)=\tilde{p}(V)$．

2022 年 12 月 8 日 (2022 年 12 月 15 日訂正)

実際 $\tilde{p}$ が正則曲面を与えることは，チェインルール

$$(1.1)\qquad \left(\frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial v}\right) P = \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \eta}\right), \qquad P := D\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

と，座標変換 φ のヤコビ行列 P の正則性による．この状況を $\tilde{p}$ **は** p **からパラメータ変換で得られる**という．

例 1.4. 写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \ni {}^t(u,v) \mapsto {}^t(\cos u \operatorname{sech} v, \sin u \operatorname{sech} v, v - \tanh v)$ は領域 $U := \{{}^t(u,v)\,;\, v > 0\}$ に制限すれば正則曲面を与える．集合 $\Sigma := \{{}^t(u,0)\,;\, u \in \mathbb{R}\}$ 上では p_u と p_v が一次従属になる．

一般に写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$ の偏微分 p_u, p_v が $\mathrm{P} \in U$ で一次従属であるとき，P を p の**特異点**という．特異点である，という性質はパラメータ変換によらない．

■長さ・面積　領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を考える．有界閉区間 $[a,b]$ で定義された U 上の C^∞-級曲線 $\gamma\colon [a,b] \ni t \mapsto \gamma(t) := {}^t\big(u(t), v(t)\big) \in U \subset \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，$\hat{\gamma}(t) := p \circ \gamma(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$ は p の像の上の曲線を与える．チェインルールより $\dot{\hat{\gamma}}(t) = \dot{u}p_u + \dot{v}p_v$ なので，$\hat{\gamma}$ の弧長は次で与えられる：

$$(1.2)\quad \mathcal{L}(\hat{\gamma}) = \int_a^b \sqrt{(p_u \cdot p_u)\dot{u}^2 + 2(p_u \cdot p_v)\dot{u}\dot{v} + (p_v \cdot p_v)\dot{v}^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\tfrac{du}{dt}, \tfrac{dv}{dt}\right) \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}}\, dt.$$

定義 1.5. 領域 U の有界な部分領域 D でその閉包 $\overline{D}$ が U の部分集合となるものを考える．このとき $\overline{D}$ の像 $p(\overline{D})$ の面積を次で定義する：

$$(1.3)\qquad \mathcal{A}_p(\overline{D}) := \iint_{\overline{D}} |p_u \times p_v|\, du\, dv.$$

命題 1.6. 弧長 (1.2) と面積 (1.3) は $\mathbb{R}^3$ の合同変換，パラメータ変換で不変である．

問題

1-1 写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $p(u,v) := {}^t(v, 3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv)$ で定める．$\mathbb{R}^2$ の部分集合で次を満たす最大のものを求めなさい：
- $p(u,v) = p(u',v')$，$(u,v) \neq (u',v')$ となる (u',v') が存在するような (u,v) の集合．
- 点 $(0,1)$ を含み，$p|_U$ が正則曲面を与えるような領域 U.

1-2 領域 $D := (-\pi,\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上で定義された正則曲面 $p\colon D \ni (u,v) \mapsto p(u,v) := {}^t\big(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\big) \in \mathbb{R}^3$ に $u = \xi$, $v = v(\eta)$ という形のパラメータ変換を施して，$\tilde{p}(\xi,\eta) = p\big(\xi, v(\eta)\big)$ が $|\tilde{p}_\xi| = |\tilde{p}_\eta|$, $\tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta = 0$ を満たすような $\tilde{p}(\xi,\eta)$ を求めなさい．

1-3 正の定数 a に対して正則曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $p(u,v) := {}^t\big(a \cos v \cosh \frac{1}{a}u, a \sin v \cosh \frac{1}{a}u, u\big)$ で定める．正の数 δ に対して $S(\delta) := \{p(\delta,v); -\pi \leqq v \leqq \pi\}$, $D(\delta) := \{p(u,v); -\delta \leqq u \leqq \delta, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$ とするとき，$S(\delta)$ の弧長と $D(\delta)$ の面積を求めなさい．