幾何学概論第二 (MTH.B212)

第一・第二基本形式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/12/15

問題 1-1

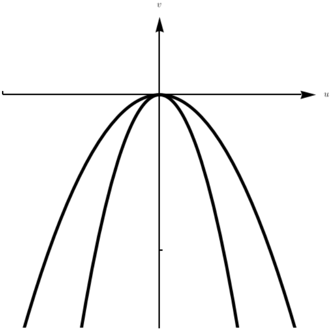
問題

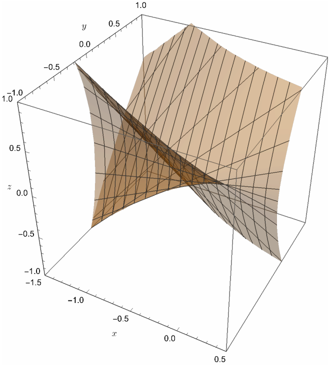
写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $p(u,v) := {}^t(v, 3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv)$ で定める．$\mathbb{R}^2$ の部分集合で次を満たす最大のものを求めなさい：

- $p(u,v) = p(u',v')$，$(u,v) \neq (u',v')$ となる (u',v') が存在するような (u,v) の集合.
- 点 ${}^t(0,1)$ を含み，$p|_U$ が正則曲面を与えるような領域 U.

Swallowtail

$$p(u,v) = {}^t(v, 3u^4 + u^2 v, 4u^3 + 2uv)$$





Swallowtail：自己交点集合

$$p(u,v) = {}^t(v, 3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv)$$

$$\begin{cases} v & = v' \\ 3u^4 + u^2 v & = 3u'^4 + u'^2 v' \\ 4u^3 + 2uv & = 4u'^3 + 2u'v' \end{cases}$$

Swallowtail：特異点集合

$$p(u,v) = {}^t(v, 3u^4 + u^2 v, 4u^3 + 2uv)$$

$$\begin{aligned} p_u(u,v) &= 2(6u^2+v)\,{}^t(0,u,1), \\ p_v(u,v) &= {}^t(1,u^2,2u) \end{aligned}$$

Swallowtail：パラメータ変換

$(u,v)=(\xi,\eta-6\xi^2)$; $(\xi,\eta)=(u,6u^2+v)$

$$\begin{aligned}
p(u,v) &= {}^t(v, 3u^4+u^2v, 4u^3+2uv) \\
\tilde{p}(\xi,\eta) &= {}^t(\eta-6\xi^2, -3\xi^4+\xi^2\eta, -8\xi^3+2\xi\eta) \\
\tilde{p}_\xi &= {}^t(-12\xi, -12\xi^3+2\xi\eta, -24\xi^2+2\eta) \\
\tilde{p}_\eta &= {}^t(1, \xi^2, 2\xi)
\end{aligned}$$

特異点集合：$\{(\xi,\eta)\,;\,\eta=0\}$.

問題 1-2

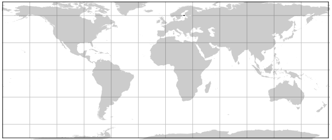
問題

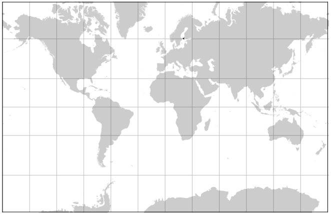
領域 $D := (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上で定義された正則曲面
$p\colon D \ni (u, v) \mapsto p(u, v) := {}^t\!\big(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\big) \in \mathbb{R}^3$ に
$u = \xi$, $v = v(\eta)$ という形のパラメータ変換を施して,
$\tilde{p}(\xi, \eta) = p\big(\xi, v(\eta)\big)$ が $|\tilde{p}_\xi| = |\tilde{p}_\eta|$, $\tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta = 0$ を満たすような
$\tilde{p}(\xi, \eta)$ を求めなさい.

Mercator's world map

$$\eta = \log \frac{1-\tan\frac{v}{2}}{1+\tan\frac{v}{2}}$$

$$p(u,v) = {}^t\bigl(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\bigr)$$
$$\tilde{p}(\xi,\eta) = {}^t\bigl(\operatorname{sech}\eta \cos\xi, \operatorname{sech}\eta \sin\xi, \tanh\eta\bigr)$$





等温座標系・共形座標系

定義

正則曲面 $p(u,v)$ が $|p_u| = |p_v|$, $p_u \cdot p_v = 0$ を満たしているとき，(u,v) を曲面の等温座標系・共形座標系 という．

- 「等温座標系」isothermal coordinate system の名称の由来は諸説ある．「共形座標系」conformal ...の方が適当か？
- 等温座標系は「角度を保つ」

接ベクトル空間

定義

正則曲面 $p(u,v)$ の (u_0,v_0) における<u>接ベクトル空間</u>とは $p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ が張る $\mathbb{R}^3$ の 2 次元線形部分空間.

$$dp(T_{(u_0,v_0)}U) := \mathrm{Span}\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\}$$

任意の接ベクトル $\boldsymbol{w} \in dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= w_1 p_u(u_0,v_0) + w_2 p_v(u_0,v_0) \\ &= \big(p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\big)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表される.

接ベクトル空間の内積

接ベクトル空間 $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間なので，内積が定義される．

事実

接ベクトル空間 $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ の内積の，基底 $\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\}$ における表現行列は

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}.$$

ただし，各量は (u_0, v_0) における値を表す．

速度ベクトル

- $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$(u_0, v_0) \in U$.
- $\gamma_j(t) = (u_j(t), v_j(t))$：$U$ 上の曲線で $\gamma_k(0) = (u_0, v_0)$ となるもの（$j = 1, 2$）
- $\hat{\gamma}_j(t) = p \circ \gamma_j(t)$

事実

$\gamma = (u, v) = \gamma_j$ に対して

$$\dot{\hat{\gamma}}(0) = (p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)) \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

したがって

$$\dot{\hat{\gamma}}_i(0) \cdot \dot{\hat{\gamma}}_j(0) = (\dot{u}_i, \dot{v}_i) \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \end{pmatrix}..$$

長さと角度

- $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$(u_0, v_0) \in U$.
- $\gamma_j(t) = (u_j(t), v_j(t))$：$U$ 上の曲線で $\gamma_k(0) = (u_0, v_0)$ となるもの（$j = 1, 2$）

事実

$\dot{\hat{\gamma}}_1(0)$ と $\dot{\hat{\gamma}}_2(0)$ の成す角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\dot{\hat{\gamma}}_1 \cdot \dot{\hat{\gamma}}_2}{|\dot{\hat{\gamma}}_1|\,|\dot{\hat{\gamma}}_2|}$$
$$= \frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{v}_1\dot{u}_2) + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E(\dot{u}_1)^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G(\dot{v}_1)^2}\sqrt{E(\dot{u}_2)^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G(\dot{v}_2)^2}}$$

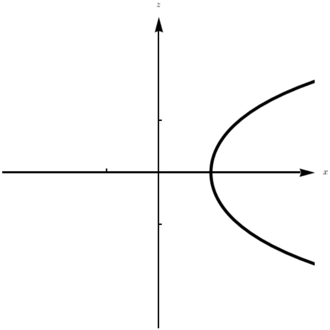
とくに $E = G$ かつ $F = 0$ なら θ は $\mathbb{R}^2$ 上の $\dot{\gamma}_1(0)$, $\dot{\gamma}_2(0)$ の 成す角と一致する.

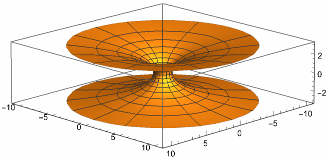
問題 1-3

問題

正の定数 a に対して正則曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $p(u,v) := {}^t\left(a\cos v\cosh\frac{1}{a}u, a\sin v\cosh\frac{1}{a}u, u\right)$ で定める．正の数 δ に対して $S(\delta) := \{p(\delta, v);\, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$,
$D(\delta) := \{p(u,v);\, -\delta \leqq u \leqq \delta, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$ とするとき，$S(\delta)$ の弧長と $D(\delta)$ の面積を求めなさい.

Catenoid





面積

$$\mathcal{A}_p(\overline{D}) = \iint_{\overline{D}} |p_u \times p_v| \, du \, dv$$