幾何学概論第二 (MTH.B212)

第一・第二基本形式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/12/15

設定

- U: uv-平面の領域；V: $\xi\eta$-平面の領域
- $\varphi\colon V \to U$：微分同相
- P：ヤコビ行列

$$P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

- 関数などは断りのない限り C^∞-級

微分

定義

関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ の微分：

$$df := f_u\,du + f_v\,dv = (f_u, f_v)\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

事実

微分はパラメータのとり方によらない.

第一基本量と第一基本形式

- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面

定義

第一基本行列；第一基本量

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

第一基本形式

$$ds^2 := E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = dp \cdot dp = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v)$$

単位法線ベクトル場

- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- ν：単位法線ベクトル場；$\nu = (\pm)\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$.

補題

$$
\begin{aligned}
p_{uu}\cdot\nu &= -p_u\cdot\nu_u, & p_{uv}\cdot\nu &= -p_u\cdot\nu_v,\\
p_{vu}\cdot\nu &= -p_v\cdot\nu_u, \quad p_{vv}\cdot\nu Y = -p_v\cdot\nu_v
\end{aligned}
$$

とくに $p_u\cdot\nu_v = p_v\cdot\nu_u$.

第二基本形式・第二基本量

定義

第二基本行列；第二基本量

$$\widehat{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} := -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) = -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix}$$

第二基本形式

$$ds^2 := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = -dp \cdot d\nu = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v)$$

パラメータ変換

- $\tilde{p}(\xi,\eta)$: $p(u,v)$ のパラメータ変換.
- $\tilde{p}$ の第一基本量などを $\widetilde{E}$ などと書く.

補題

$$\widetilde{\widehat{I}} = {}^t P \, \widehat{I} \, P, \qquad \widetilde{\widehat{II}} = {}^t P \, \widehat{II} \, P.$$

とくに ds^2, II はパラメータのとり方によらない.

問題 2-1

問題

実数 a, b が $a^2+b^2=1$ かつ $a\neq 0$ を満たしているとき，写像 $p_{a,b}\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ を

$$p_{a,b}(u,v) := \begin{pmatrix} a\,\operatorname{sech} v\cos u \\ a\,\operatorname{sech} v\sin u \\ a(v-\tanh v)+bu \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$p_{a,b}$ の第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

問題 2-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ に対して，
$p(x, y) := {}^t\bigl(x, y, f(x, y)\bigr)$ と定める．

- p の第一基本行列 $\widehat{I}$，第二基本行列 $\widehat{II}$ を求めなさい．
- とくに点 $(x_0, y_0) \in U$ において p の単位法線ベクトルが ${}^t(0, 0, 1)$ に平行であるとき，(x_0, y_0) において $\widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ は対称行列であることを示しなさい．