2022 年 12 月 15 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 2

お知らせ

- 29 名の方から課題の提出がありました．T2SCHOLA よりフィードバックしています．手書きのコメントは読みにくい（読めない）かもしれません．この資料にあるものが「正式」で手書きは山田用のメモとお考えください．

前回の補足

- 「解析学概論」の授業では座標変換を C^1-級で定義したそうです．ここでは C^∞-級と仮定していますが，それはなぜか，というご質問が複数．(1) 曲率（次回）を定義するためには 2 回偏微分する必要があるので，少なくとも $p(u,v)$ は C^2-級である必要がある．これをパラメータ変換して $\tilde{p}(\xi,\eta)=p(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))$ が C^2-級になるためにはパラメータ変換も C^2 である必要がある．曲面論の基本定理を述べるためにはさらにもう 1 回微分する必要があるので C^3 でなければならない．C^3 で止めるという立場もあるだろうが，面倒なので C^∞ にした．(2) たとえば，平面曲線 γ に対して縮閉線 $\sigma=\gamma+(1/\kappa)\boldsymbol{n}$ を定義したことを思い出してほしい．γ が C^r-級のとき $\boldsymbol{n}$ は C^{r-1} 級，κ は C^{r-2}-級なので，縮閉線の微分可能性は 2 階おちる．このように曲線や曲面に変換をほどこしたときの微分可能性の議論による煩雑さを避けたいなら最初から C^∞ としておくのがよい．

前回までの訂正

- 講義資料 1, 3 ページ，13 行目（パラグラフのタイトル）: **逆写像定理（二変数）** ⇒ **逆写像定理（多変数）**
- 講義資料 1, 3 ページ，14 行目：$(m,n$-行列 ⇒ (m,n)-行列
- 講義資料 1, 3 ページ，9 行目：曲線 $\gamma\colon[a,b]\to$ ⇒ C^∞-級曲線 $\gamma\colon[a,b]\to$
- 講義資料 1, 3 ページ，下から 2 行目：U ⇒ U
- 講義資料 1, 4 ページ，問題 1-1 の 1 行目；映写資料 C（黒板 C) 問題 1-2
  $p(u,v):={}^t(v,3u^4+uv^2,4u^3+2uv)$ ⇒ $p(u,v):={}^t(v,3u^4+u^2v,4u^3+2uv)$
- 講義資料 1, 4 ページ，問題 1-1 の 4 行目；点 ${}^t(0,1)$ ⇒ 点 $(0,1)$
- 講義資料 1, 4 ページ，問題 1-2 の 1 行目；映写資料 C（黒板 C) 問題 1-2
  $D:=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times(-\pi,\pi)$ ⇒ $D:=(-\pi,\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
- 映写資料 C；黒板 C 最終ページ：問題 1-2 ⇒ 問題 1-3

授業に関する御意見

- 行ベクトルと列ベクトルをどう使い分けているかよくわからないです．例えば映写資料 B の 7 枚目で，φ の定義域は列ベクトルなのに，γ の定義域は行ベクトルだったり，問題 1-1 の条件では行ベクトルの集合を考えているのに 2 番目の条件では ${}^t(0,1)$ を含むとなっています．これは誤植ですか？　**山田のコメント：** はい．行列をかける，という状況がある場合は行と列を区別する必要がありますが，パラメータ空間などの場合にはあまり気にしなかったりします．
- 3Q の幾何学概論を履修していないので不安です．　**山田のコメント：** 多分大丈夫だと思う．
- 幾何第三（原文ママ）の試験で思うように点数がとれずかなり悔しかったです．自分としては万全に準備したつもりだったんですが，問題点がたくさんあったようです．また解き直してみます．次回のテストではもう少しよい点が取れるよう，今からがんばります．あと 2 ヶ月程よろしくお願いします．　**山田のコメント：** 気楽にいきましょう．
- 試験はプレッシャーがかかるので嫌ですが，講義はとても楽しみです．　**山田のコメント：** プレッシャーかけてごめん．
- テストで a を y の値で場合分けすると a が y の値となって定数でなくなってしまうから，ダメだということでしょうか？ 定数は何をもって定数なのでしょうか？　**山田のコメント：** 変化しない数．面倒臭いので，「区間 $[0,1]$ の要素を一つ」としよう．
- $\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi$ ← これが書けないです．スライドで表示される形でなく，手書きで上手く書けるようになりたいです．　**山田のコメント：** なってください．
- 締切が 24 時間伸びるとかなり助かるのですが，そうはいきませんよね．　**山田のコメント：** ちょっときつい．
- 4Q もがんばりたいです．　**山田のコメント：** 私もです．
- マイク変えましたか．第一のときよりも音声が濁っている気がします．　**山田のコメント：** 設備が違います．
- もし先生の新大学名称案がありましたら教えてください．　**山田のコメント：** ひ・み・つ♡

質問と回答

質問 1： 逆写像定理の説明のときに，陰関数定理の名前をだされていましたが，あまりつながりがわからなかったです．

お答え： 陰関数定理の証明は逆写像定理を用いるのでは？

質問 2： 写像が微分同相であるとは例えばある空間 (例えば $\mathbb{R}^3$) に対し，ある点を元々の基底から別の基底に取り替えたときに座標がどのように対応するかを写像で表したときに，その写像が微分同相であればその新しい座標に対し元の座標と同じように微分操作が可能であることを表していますか?

お答え：「点をもとの基底から別の基底に取り替える」とはどういう操作なのでしょう．「点を」ですよね．「もとの座標と同じように微分操作が可能」とはどういう意味でしょうか．微分操作とは？ 一応空気を読んで回答すると (1) $\mathbb{R}^3$ の正則な線形変換は微分同相 (2) 微分同相の合成は微分同相．

質問 3： 教科書（曲線と曲面）p68 で，曲面に現れる特異点の例が図で 4 つ上げられていましたが，どれもすべてとがった部分がありました．そこで，特異点だけれども曲面として $\mathbb{R}^3$ に表してみるととがらないものはありますか．（p 62 の記述で “なめらかに見えない可能性がある” とあったので，いつもなめらかに見えないわけではないのだろうと解釈しました）．

お答え： たとえば $p(u,v) = {}^t(u, v^3, u^2+v^6)$ は $\{(u,v)\,;\, v=0\}$ の各点で特異点をもつが，像はなめらかな曲面 $z=x^2+y^2$ になっている．)

質問 4： 曲面における特異点は図形的にどのような意味を持っていますか．

お答え：「図形的」という言葉をどういう意味で使っていますか？ パラメータや等長変換によらないものを「図形的」というなら特異点であること自体が図形的な性質．

質問 5： 1 変数での正則の定義と 2 変数の定義の共通点は $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ が貼る空間 (?) の次元が落ちないということでしょうか．

お答え： そのとおり．「生成する部分空間」という意味と思えば “?” は不要ですね．

質問 6： 正則曲線の条件は $\dot\gamma \neq 0$，正則曲線（原文ママ：曲面）の条件は p_u と p_v が一次独立であるということでした．$\mathbb{R}^n$ 上の $n-1$ 個パラメータをもつ部分集合の正則性の条件は p_{u_1}, ..., $p_{u_{n-1}}$ が 1 次独立であると拡張できますか？

お答え： はい．

質問 7： 3Q では曲率などを調べるときに γ のパラメータが弧長パラメータであるかどうかを確かめるなどしていましたが，今回でてきた弧長はそれを調べるとその値になにか特別な意味を持つことはあるのでしょうか．また $|\dot\gamma| = 1$ となる γ のパラメータである弧長と $\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^v \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt$ で定義された弧長は名前が同じだが，まったく別のもののように感じます．性質的に同じであるということはあるのでしょうか．

お答え： 前半：曲線の長さですが，それでは不足でしょうか．後半：$s(t) = \int_a^t |\dot\gamma(u)|\,du$ とおく（弧長関数）と，s は弧長パラメータ（ということを 3Q でやりましたよね．試験にも出た）．

質問 8： n 次元の超曲面を考えるときに、その面積要素も ($n-1$ 個のベクトルの) 外積の大きさを用いて定義すると，それはきちんと幾何学的な意味合いを反映した定義になるのでしょうか（曲面で言う微小長方形に対する拡大率のような意味付けができるか、ということです）．

お答え： できます．「n 次元の超曲面」は「n 次元空間内の超曲面」というべきですね．

質問 9： 面積について，最初から有界閉集合をとらないのはなぜですか？

お答え： それでもよいですが，内点をもたないと面積が消えてしまって面白くないので．

質問 10： 曲線の長さを折れ線による近似で定義できたように，曲面の面積を平面をつないだ面で近似して定義することはできますか．

お答え： 多面体で近似という意味ですね．はい．

質問 11： 面積を求める公式で $\iint_D |p_u \times p_v|\,du\,dv$ と被積分関数に絶対値がついていますが，$p_u \times p_v$ が面に対して表から裏向きか，裏から表向き考慮したら絶対値はつかない気がします（物理などでは絶対値をつけないで習いました）

お答え： それは「符号付き面積」ですね．(1)「絶対値」（ここでは大きさとかノルムと言ったほうが適切？）をとらないと面積はベクトル値になります．その大きさは我々が知っている面積でしょうか．たとえば，球面のパラメータ表示（問題 1-2）で $p_u \times p_v$ を積分すると対称性から積分は零ベクトルになりますが球面の面積は零といってよいでしょうか．(2) 曲面の表，裏の定義がよくわからないですよね．向き付けについてはいろいろな定義がありますが，一つパラメータ (u,v) を指定して $p_u \times p_v$ が指す向きを表と定めるというのが一つの方法だが，これはパラメータのとりかたによる．実際，パラメータ変換 $(u,v) \mapsto (v,u)$ で向きは逆転する．ここでは，スカラとしての面積

を前回の講義のように定義します．

質問 12： 曲面の面積の定義に外積を用いているので，$\mathbb{R}^3$ 内でしか意味を持たないと思うのですが，$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 4)$ 内の曲面積はどうのように定義されますか．また，曲面積というのは曲面それ自身がもつ内在的な量なのでしょうか．それとも曲面が含まれるより大きな空間に依存するのでしょうか．

お答え： 前半：$n-1$ 個のベクトルの「外積」．後半：第 5 回くらいで言及する．

質問 13： 曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$ について，点 $(u,v) \in U$ の接平面と単位法線ベクトルに関して，曲線のフルネ-セレに対応する公式は在りますか．

お答え： はい．ガウス・ワインガルテンの公式．第 5 回．

質問 14： Prop 1.6 の面積のパラメータ変換についての証明は上（省略）で正しいですか？/ 面積が曲面のパラメータのとり方に依らないことを示してみました（略）

お答え： いいえ．微積分で習った重積分の変数変換の公式ではヤコビ行列式の絶対値が出てきていませんか？

質問 15： 曲線における弧長パラメータのようなものは曲面では考えられないのでしょうか．例えば，2 つの変数の偏微分の絶対値が常に 1 になるや，外積の絶対値が常に 1 になるなど．

お答え： (1) とることができる場合がある（一般的ではない）．(2) 一意性がなりたたない．標準的なパラメータはないんだよ，ということは講義でコメントした．

質問 16： 問題 1-2 の解 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ の条件として $\tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta = 0$ があったが，これは恒等的に成立しており，$\tilde{p}(\xi,\eta)$ を決定する上で使用しなかったため，条件として課された理由がわかりませんでした．これは講義のヒントで言っていたメルカトル図法に関連する情報なのでしょうか．

お答え： はい．そうです．少しコメントします．

質問 17： メルカトル図法はの角度を保つ性質があります．$\boldsymbol{p}$ 上の $(u,v)\cdot(u+dv)$（原文ママ：(u,v) と $(u,v+dv)$ を結ぶ線分？）の $(u,v)\cdot(u+du,v+dv)$ となす角を θ, $\tilde{\boldsymbol{p}}$ 上のそれに応じた角度を $\tilde{\theta}$ とすると（略：(u,v) で表示した球面上の 2 方向の成す角と，対応する (ξ,η) で表示された角が等しいことを示している），$|\boldsymbol{p}_\xi| = |\boldsymbol{p}_\eta|$ は必要でしょうか．

お答え： メルカトル図法に限らず，パラメータ変換は角度を保ちます．メルカトル図法が「等角図法」であるというのは，「(ξ,η)-平面をユークリッド平面とみなして測った角と曲面上の角が一致する」ことです．

質問 18： 問題 1-2 において, $dv/d\eta = \pm\cos v$ と表れるが, プラスとマイナスで意味がどう違うのか. / $v = \log(\tan\frac{\eta}{2} + \frac{\pi}{2})$ と v が表せることから，η が 70° 以上では v の変化が大きくなる．そのため，モルワイデ図法では緯度が 70° 以上になると極端に拡大されるため，緯度が 70° 以上の値域ではあまり表示されなかったりするのはこれが原因でないかと考えた．

お答え： 前半：v は η の増加関数か減少関数か．後半：モルワイデ図法ですか？ ここの問題とは関係ない？ 70 という数字はどこから出てきたのでしょう．歪みは連続的に増えていきますから，ある閾値を設定しないと「極端に拡大」という言葉が生きてきません．

質問 19： 問題 1-2 を解いていくと，$v(\eta) = \pm\cos v(\eta)$ という微分方程式が得られました．上手な解の見つけ方は分かりませんでしたが $v(\eta) = \tan^{-1}(\sin\eta)$ という解と $v(\eta) = 2\tan^{-1}(\tanh\frac{\eta}{2})$ という解を見つけることができました (計算してみたら定数のズレなく一致しました)．この微分方程式の解を見つける上手い方法はあるのでしょうか？

お答え： $d\eta = dv/\cos v$ を積分．

質問 20： $A \in \mathrm{SO}(3)$ に対して $(A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b}) = A(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ ということですが，一般の行列でどうなるか考えてみました．

$$\bigl((A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b})\bigr)\cdot A\boldsymbol{c} = \det(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{c}) = (\det A)\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\det A)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

で，$\bigl((A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b})\bigr)\cdot A\boldsymbol{c} = {}^tA\bigl((A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b})\bigr)\cdot\boldsymbol{c}$ だから ${}^tA$ が正則なら，$(A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b}) = (\det A)({}^tA)^{-1}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ となりました．いかがですか．

お答え： はい．それで結構です．「${}^tA$ が正則」は「A が正則」と同値ですね．A が正則でない場合でも余因子行列 $\widetilde{A}$ を用いれば $(A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b}) = \widetilde{A}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

質問 21： $A \in \mathrm{SO}(3) \Rightarrow (A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b}) = A(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が成り立つことは，$\mathrm{SO}(3)$ が向きを変えない（？）回転行列であることを示していますか？ また，この等式のうまい示し方はありますか？

お答え： 前半：「向きを変えない回転行列」というものはどう定義するんでしょう．後半：テキスト 209 ページ．

質問 22： $A \in \mathrm{SO}(3) \Rightarrow (A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b}) = A(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ の証明を考えてみました．（以下略）

お答え： はい．

質問 23： 今回紹介した，任意の $\boldsymbol{c}$ に対して $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ となるベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ も外積の定義ということ

で宜しいでしょうか.

お答え： これを「定義としてもよい」. 一つの文脈では定義は一つ，他は同値な条件になりますね.

質問 24： ユークリッド空間に限らず，ベクトル空間としての性質と微分構造を持つ集合上であれば曲面 (あるいは超曲面) を今回と同じように考えることができますか．上のようなことができると仮定した質問ですが，その集合のベクトル空間としての次元が有限でない場合，正則性は有限次元の場合と同様に接ベクトルたちの一次独立性で定義されますか．それとも「正則曲面」にしかるべき性質を持たせるためにはさらに条件が必要になってくるのでしょうか.

お答え： 前半：はい．ただし，長さ，面積などの量はユークリッド空間の計量構造（内積）が必要．後半：定義域は有限次元にしますか，無限次元にしますか？

質問 25： S^2 全体の正則なパラメータ表示はあるのでしょうか．素朴に $p(u,v) = {}^t(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$ $((u,v) \in \mathbb{R}^2)$ とすると北極と南極で正則にならないことは確認しました.

お答え： ありません．球面はコンパクトだが，$\mathbb{R}^2$ の領域は非コンパクト.

質問 26： xz 平面上グラフ $z = |x|$ を z 軸を軸として回転すると，円錐をひっくり返した（山田注：これも円錐では？）ような平面（原文ママ：曲面）になり，これは ${}^t(x, y, f(x,y))$ と表されるので正則平面（原文ママ：正則曲面）となります．このように「なめらかなでない部分を持つもの」を正則平面に含めるとすると正則平面はどのような平面を除外するのですか？

お答え： 徹底的に「平面」で攻めていますね．言葉を覚えましょう．ここの f は C^∞-級ではないので ${}^t(x, y, f(x,y))$ は正則曲面とはいえません.

質問 27： 正則曲面を考える際は，曲面の写像が 2 変数関数になるのはなぜでしょうか．1 変数関数（$U \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$) (山田注：原文ママ) や 3 変数関数（$U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$）では何かしら都合がよくないのでしょうか.

お答え： 曲面だからです．1 変数の場合は曲線になる（そして，それは幾何学概論第一であつかってきたもの）わけで，いまさらきかれても，と思います．$\mathbb{R}^3$ の領域から $\mathbb{R}^3$ の領域への微分同相は 3 変数ですね.

質問 28： $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 全単射かつ連続の時，f^{-1} は連続になりますか．また $n \geqq 2$ として $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が全単射で連続のとき，f^{-1} は連続になりますか？

お答え： $\mathbb{R}^n$ の位相がユークリッド位相なら正しい．ε-δ で示せる.

質問 29： p69 の問題 2 の解答例が p272 にありあすが，この $p(u,v)$ の第 2 項はどのように導出するのでしょうか.

お答え： テキストの「メビウスの帯」のパラメータ表示ですね．解答に「たとえば」とあるように導出するものではないのですが，xy 平面上の半径 2 の円周上に，円周の接ベクトルに直交する線分を，円周を一回りするときに半回転するように生やしていく，ということを表しました．たとえば ${}^t(0,0,1)$, ${}^t(\cos u, \sin u, 0)$ は円周上の点 ${}^t(2\cos u, 2\sin u, 0)$ を通り，その点における円の接線に直交する平面の正規直交基底を与えていることに注意すると意味がわかると思います.

質問 30： 集合 $A \setminus B$ と $A - B$ は等しい集合を示していると思うのですが，この 2 つの記号 “\”, “−” の意味の違いがあったら教えてほしいです．また同じ意味なのであればどちらのほうが良く使われるか知りたいです.

お答え： 同じ意味だと思います．山田は “\” がほとんど．どちらもよく見ます.

2 第一・第二基本形式

ここでは断りのない限り U, V をそれぞれ uv-平面, $\xi\eta$-平面の領域, $\varphi\colon V \ni (\xi,\eta) \mapsto (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)) \in U$ を微分同相（パラメータ変換），そのヤコビ行列を P とする：$P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$.

■微分 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された C^∞-級関数 $(u,v) \mapsto f(u,v)$ に対して $df := f_u\,du + f_v\,dv$ を f の**全微分**，**微分**または**外微分**という．ここで，パラメータ変換 $\varphi : (\xi,\eta) \mapsto (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ に対して

$$(2.1) \qquad du = u_\xi\,d\xi + u_\eta\,d\eta, \quad dv = v_\xi\,d\xi + v_\eta\,d\eta \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

と考え，$\tilde{f} := f \circ \varphi$ とおくと，次のように**全微分はパラメータのとり方によらない**ことがわかる：

$$\tilde{f}_\xi\,d\xi + \tilde{f}_\eta\,d\eta = (\tilde{f}_\xi, \tilde{f}_\eta)\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (f_u, f_v)P\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (f_u, f_v)\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = f_u\,du + f_v\,dv$$

以下，$p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を曲面の正則な（C^∞-級）パラメータ表示（正則曲面），$\tilde{p} := p \circ \varphi$ としておく．また $A \in \mathrm{O}(3)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ に対して $\hat{p} := Ap + \boldsymbol{a}$，すなわち $\hat{p}$ は p に $\mathbb{R}^3$ の合同変換を施したものとする．

■第一基本量と第一基本形式 正則曲面 $p(u,v)$ に対して

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

を**第一基本行列**，関数 E, F, G を**第一基本量**という．曲面 p に $\mathbb{R}^3$ の合同変換を施した $\hat{p} = Ap + \boldsymbol{a}$ に対して $\hat{p}_u = Ap_u$, $\hat{p}_v = Ap_v$ なので，内積が直交行列の作用で不変なことから，**第一基本量は $\mathbb{R}^3$ の合同変換で不変である**．また，曲面 p をパラメータ変換して得られた曲面 $\tilde{p}$ の第一基本行列を $\widetilde{\widehat{I}}$，第一基本量を $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ と書くと，チェイン・ルールより，ヤコビ行列 P を用いて $\widetilde{\widehat{I}} = {}^t P\,\widehat{I}\,P$ と書ける．したがって第一基本量はパラメータに依存する．ここで，(2.1) を考えると，次の式はパラメータのとり方によらない：

$$ds^2 := dp \cdot dp = (du, dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

すなわち $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \widetilde{E}\,d\xi^2 + 2\widetilde{F}\,d\xi\,d\eta + \widetilde{G}\,d\eta^2$．これを曲面の**第一基本形式**という．テキスト例 7.2.

■長さ・角度・面積 曲面 $p(u,v)$ の (u_0,v_0) における**接ベクトル空間**とは $p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ が張る $\mathbb{R}^3$ の 2 次元線形部分空間である．これを $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ と表す[*1]．$\mathbb{R}^3$ の内積を制限すれば，部分空間 $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ の内積が得られるが，第一基本行列はその内積の，基底 $\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\}$ に関する表現行列である．とくに，$p_u = p_u(u_0,v_0)$ などと略記すれば

$$(2.2) \qquad \boldsymbol{x} = x_1 p_u + x_2 p_v = (p_u, p_v)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = y_1 p_u + y_2 p_v \quad \text{に対して} \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_1, x_2)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

このことから，接ベクトル空間の元（接ベクトル）の長さ，角度は第一基本量で表される．

2022 年 12 月 15 日

[*1] 煩雑な記号だが，多様体論における一般的な記号を用いた．2 次元多様体 U の (u_0,v_0) における接空間をはめ込み p の微分で $\mathbb{R}^3$ の $p(u_0,v_0)$ における接空間に送った像のことだが，ここでは一つの熟語とみなせば良い．

とくに，U 上の曲線 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ $(a \leqq t \leqq b)$ の像 $\hat{\gamma}(t) = p \circ \gamma(t)$ の弧長は次で与えられる：

$$\mathcal{L}(\hat{\gamma}) = \int_a^b \sqrt{E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\,\dot{v} + G\,\dot{v}^2}\,dt.$$

また，ラグランジュの恒等式 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$ から，$\overline{D}$ が有界であるような領域 $D \subset U$ に対応する曲面の面積は次で与えられる（テキスト例 7.3）：

$$\mathcal{A}_p(\overline{D}) = \iint_{\overline{D}} dA, \qquad dA := \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

■単位法ベクトル　正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，C^∞-級写像 $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$ で，各 (u_0, v_0) において $|\nu(u_0, v_0)| = 1$ かつ $\nu(u_0, v_0) \perp dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ を満たすものを**単位法ベクトル場**という．$dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ は 2 次元なのでその直交補空間は 1 次元なので，各点における "単位法ベクトル" は 2 通りのとり方しかない．とくに $\nu = \pm\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$．どちらをとってもよいが，以下単位法ベクトル場を一つ指定しておく．

■第二基本量と第二基本形式

補題 2.1. 正則曲面 $p = p(u, v)$ の単位法ベクトル場 $\nu(u, v)$ をとるとき，次が成り立つ：

$$p_{uu} \cdot \nu = -p_u \cdot \nu_u, \quad p_{uv} \cdot \nu = -p_u \cdot \nu_v, \quad p_{vu} \cdot \nu = -p_v \cdot \nu_u, \quad p_{vv} \cdot \nu = -p_v \cdot \nu_v \quad \text{とくに} \quad p_u \cdot \nu_v = p_v \cdot \nu_u.$$

証明： ベクトル値関数の内積についての「積の微分公式」から $p_{uv} \cdot \nu = (p_u \cdot \nu)_v - p_u \cdot \nu_v = -p_u \cdot \nu_v$．最後の等号は p_u と ν が常に直交することによる．

定義 2.2. 正則曲面 $p(u, v)$ とその単位法ベクトル場 $\nu(u, v)$ に対して

$$\widehat{I\!I} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} := -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) = -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}$$

を**第二基本行列**，L, M, N を**第二基本量**という（テキスト例 8.2, 8.3, 8.4）．

曲面 p に合同変換を施した曲面 $\hat{p} = Ap + \boldsymbol{a}$ に対して，$A\nu$ は $\hat{p}$ の単位法ベクトル場を与える．この法ベクトル場に対して**第二基本量は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない**．さらに，第一基本形式と同様に

$$I\!I = (du, dv)\,\widehat{I\!I}\,\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

を**第二基本形式**とよぶ．第一基本形式の場合と同様に第二基本形式もパラメータのとり方によらない．

問題

2-1 実数 a, b が $a^2 + b^2 = 1$ かつ $a \neq 0$ を満たしているとき，写像 $p_{a,b}\colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ を

$$p_{a,b}(u, v) := \begin{pmatrix} a \operatorname{sech} v \cos u \\ a \operatorname{sech} v \sin u \\ a(v - \tanh v) + bu \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$p_{a,b}$ の第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

2-2 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ に対して，$p(x, y) := {}^t\big(x, y, f(x, y)\big)$ と定める．

- p の第一基本行列 $\widehat{I}$，第二基本行列 $\widehat{I\!I}$ を求めなさい．
- とくに点 $(x_0, y_0) \in U$ において p の単位法線ベクトルが ${}^t(0, 0, 1)$ に平行であるとき，(x_0, y_0) において $\widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I}$ は対称行列であることを示しなさい．