幾何学概論第二 (MTH.B212)

主曲率・ガウス曲率・平均曲率

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/12/22

問題 2-1

問題

実数 a, b が $a^2+b^2=1$ かつ $a \neq 0$ を満たしているとき，写像 $p_{a,b}\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ を

$$p_{a,b}(u,v) := \begin{pmatrix} a\operatorname{sech} v\cos u \\ a\operatorname{sech} v\sin u \\ a(v-\tanh v)+bu \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$p_{a,b}$ の第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

螺旋曲面

$\in SO(3)$ $\mathbb{R}^3$

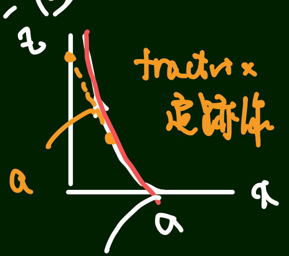
$$p(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\operatorname{sech} v \\ 0 \\ \underline{\underline{a(v-\tanh v)}} \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

以下の $\mathbb{R}^3$ の向きを保つ合同変換の 1 パラメータ族：<u>螺線運動</u>

$$H_u \colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Helical motion

$p(u,v)$ の像は，xz-平面上のトラクトリクス



$$\gamma(v) := \begin{pmatrix} a\operatorname{sech} v \\ 0 \\ a(v-\tanh v) \end{pmatrix}$$

の H_u による軌跡.

$\mathbb{R}^3$ の等長変換全体が成す群 $G=O(3)\ltimes\mathbb{R}^3$

(半直積)

$$\mathbb{R} \ni u \longmapsto H_u \in G$$

G の"曲線"

加法群 $\mathbb{R}$ から G の準同型

G の 1経数部分群

共役類が分類される

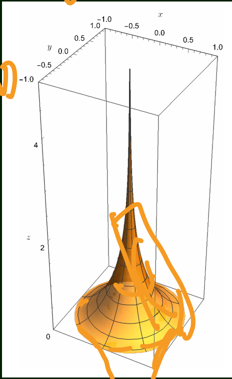
Dini's pseudosphere 擬球面

非ユークリッド幾何の(局所的)なモデル

$$p_{a,b}(u,v);\ (a,b) = (\cos t, \sin t)\ (0 \leqq \cancel{t < \tfrac{\pi}{2}})$$

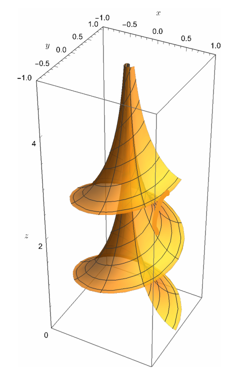
$b=0$

回転面

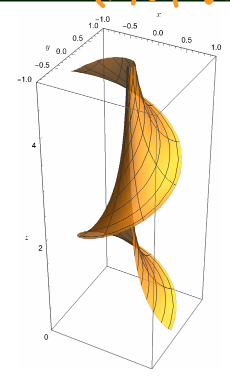


$t=0$

Bertrami's pseudosphere



$t=\frac{\pi}{12}$



$t=\frac{\pi}{6}$

計算

$$p(u,v) := p_{a,b}(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + (bu + a(v - \tanh v))\boldsymbol{e}_3.$$

$$\boldsymbol{e}_1(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は正の向きの正規直交基. of $\mathbb{R}^3$
- $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \ \ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \ \ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$
- $\frac{d}{du}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2,\ \frac{d}{du}\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1.$

計算 ($v>0$)

$$
\begin{aligned}
p(u,v) &= a \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1(u) + (bu + a(v - \tanh v))\boldsymbol{e}_3. \\
p_u &= a \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3, \\
p_v &= -a \operatorname{sech} v \tanh v \boldsymbol{e}_1 + a \tanh^2 v \boldsymbol{e}_3 \\
&= a \tanh v(-\operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_1 + \tanh v \boldsymbol{e}_3), \\
p_u \times p_v &= a \tanh v\big(a \operatorname{sech} v \tanh v \boldsymbol{e}_1 - b \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_2 + a \operatorname{sech}^2 v \boldsymbol{e}_3\big) \\
&= a \tanh v \operatorname{sech} v(a \tanh v \boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2 + a \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_3) \neq 0 \\
\nu &= a \tanh v \boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2 + a \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_3 \\
\nu_u &= b\boldsymbol{e}_1 + a \tanh v \boldsymbol{e}_2, \\
\nu_v &= a \operatorname{sech}^2 v \boldsymbol{e}_1 - a \operatorname{sech} v \tanh v \boldsymbol{e}_3. \\
p_u \cdot p_u &= a^2 \operatorname{sech}^2 v + b^2 = a^2 \operatorname{sech}^2 v + 1 - a^2 = 1 - a^2 \tanh^2 v, \\
p_u \cdot p_v &= ab \tanh^2 v, \qquad p_v \cdot p_v = a^2 \tanh^2 v, \\
-p_u \cdot \nu_u &= -a^2 \operatorname{sech} v \tanh v, \qquad -p_v \cdot \nu_v = a^2 \tanh v \operatorname{sech} v, \\
-p_u \cdot \nu_v &= -p_v \cdot \nu_u = ab \tanh v \operatorname{sech} v.
\end{aligned}
$$

$\operatorname{sech}^2 v + \tanh^2 v = 1$

$a^2 + b^2 = 1$

($v=0$ 特異点)

結論

$$p(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + (bu + a(v - \tanh v))\boldsymbol{e}_3.$$

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (1 - a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2\\
I\!I &= \mathrm{sech}\,v\tanh v(-a^2du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2)\\
\widehat{I} &= \begin{pmatrix} 1 - a^2\tanh^2 v & ab\tanh^2 v\\ ab\tanh^2 v & a^2\tanh^2 v\end{pmatrix}\\
\widehat{I\!I} &= \mathrm{sech}\,v\tanh v\begin{pmatrix} -a^2 & ab\\ ab & a^2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

第一基本行列

$$\boxed{>0}$$

$$\det \hat{I} = a^2\tanh^2 v(1 - a^2\tanh^2 v) - a^2b^2\tanh^4 v$$

$$\overset{a^2+b^2=1}{=} a^2\tanh^2 v(1 - \tanh^2 v) = a^2\tanh^2 v\,\mathrm{sech}^2 v$$

$$\det \widehat{I\!I} = -a^2\tanh^2 v\,\mathrm{sech}^2 v < 0$$

パラメータ変換

$\theta_{\xi\eta} = \sin\theta$ sine Gordon

$$p(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + (bu + a(v - \tanh v))\boldsymbol{e}_3.$$

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (1 - a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2\\
II &= \mathrm{sech}\,v\tanh v(-a^2du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2)
\end{aligned}
$$

(天下り)

Gauss 曲率

$K = \dfrac{\det II}{\det I} = -1$

$$(u,v) = \left(\xi - \eta, \frac{a}{1+b}\xi + \frac{a}{1-b}\eta\right)$$

$\exists(\xi, \eta)$

$\Rightarrow$

$$
\left(
\begin{aligned}
ds^2 &= d\xi^2 + 2\cos\theta\,d\xi\,d\eta + d\eta^2\\
II &= 2\sin\theta\,d\xi\,d\eta.
\end{aligned}
\right)
$$

asymptotic Chebyshev net

漸近チェビシェフ網

$$\theta = 4\tan^{-1}\exp\left(-\alpha\xi - \frac{1}{\alpha}\eta\right), \qquad \alpha = \frac{1+b}{a}$$

kink

soliton

$(|p_\xi| = 1 \quad |p_\eta| = 1)$

問題 2-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ に対して，
$p(x,y) := {}^t\bigl(x, y, f(x,y)\bigr)$ と定める．

- p の第一基本行列 $\widehat{I}$，第二基本行列 $\widehat{II}$ を求めなさい．
- とくに点 $(x_0, y_0) \in U$ において p の単位法線ベクトルが ${}^t(0,0,1)$ に平行であるとき，(x_0, y_0) において $\widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ は対称行列であることを示しなさい．

$z = f(x,y)$ Graph

グラフ表示

$$p(x, y) = {}^t(x, y, f(x, y))$$

$$p_x = {}^t(1, 0, f_x), \qquad p_{xx} = {}^t(0, 0, f_{xx})$$

$$p_y = {}^t(0, 1, f_y), \qquad p_{xy} = {}^t(0, 0, f_{xx}), \quad p_{yy} = {}^t(0, 0, f_y y)$$

$$p_x \times p_y = {}^t(-f_x, -f_y, 1),$$

$$\nu = \frac{1}{\delta}{}^t(-f_x, -f_y, 1) \qquad \left(\delta = \sqrt{1 + \cancel{f_x^2} + \cancel{f_y^2}}\right)$$

$\to 0$

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} 1 + \cancel{f_x^2} & \cancel{f_x f_y} \\ \cancel{f_x f_y} & 1 + \cancel{f_y^2} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{II} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

グラフ表示

$$p(x,y) = {}^t(x, y, f(x,y))$$

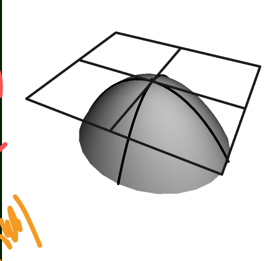
接平面 : xy-平面

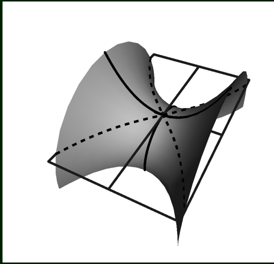
$$\nu(x_0,y_0) /\!/ {}^t(0,0,1) \Rightarrow \underline{f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0}$$

$$\widehat{I}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad \boxed{\widehat{II}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}}$$

f : (x_0, y_0) で極大

接平面の片側





→ $\det \widehat{II} > 0$

$\det \widehat{II} < 0$