幾何学概論第二 (MTH.B212)

主曲率・ガウス曲率・平均曲率

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/12/22

問題 2-1

問題

実数 a, b が $a^2+b^2=1$ かつ $a\neq 0$ を満たしているとき，写像 $p_{a,b}\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ を

$$p_{a,b}(u,v) := \begin{pmatrix} a\operatorname{sech} v\cos u \\ a\operatorname{sech} v\sin u \\ a(v-\tanh v)+bu \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$p_{a,b}$ の第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

螺旋曲面

$$p(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \operatorname{sech} v \\ 0 \\ a(v - \tanh v) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

以下の $\mathbb{R}^3$ の向きを保つ合同変換の１パラメータ族：螺線運動

$$H_u \colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

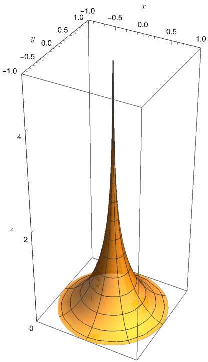
$p(u,v)$ の像は，xz-平面上のトラクトリクス

$$\gamma(v) := \begin{pmatrix} a \operatorname{sech} v \\ 0 \\ a(v - \tanh v) \end{pmatrix}$$

の H_u による軌跡.

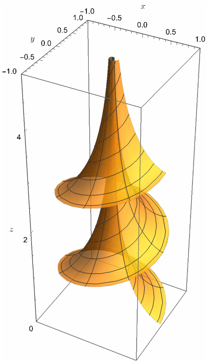
Dini's pseudosphere

$$p_{a,b}(u,v);\ (a,b) = (\cos t, \sin t)\ \left(0 \leqq t < \frac{\pi}{2}\right)$$

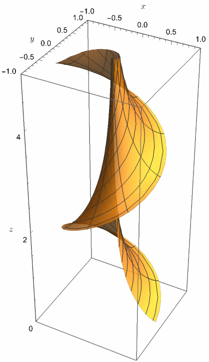


$t = 0$

Bertrami's



$t = \frac{\pi}{12}$



$t = \frac{\pi}{6}$

計算

$$p(u,v) := p_{a,b}(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + (bu + a(v - \tanh v))\boldsymbol{e}_3.$$

$$\boldsymbol{e}_1(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は正の向きの正規直交基.
- $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$
- $\frac{d}{du}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$, $\frac{d}{du}\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$.

計算

$$p(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + (bu + a(v - \tanh v))\boldsymbol{e}_3.$$

$$\begin{aligned}
p_u &= a\,\mathrm{sech}\,v\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3,\\
p_v &= -a\,\mathrm{sech}\,v\tanh v\boldsymbol{e}_1 + a\tanh^2 v\boldsymbol{e}_3\\
&= a\tanh v(-\,\mathrm{sech}\,v\boldsymbol{e}_1 + \tanh v\boldsymbol{e}_3),\\
p_u \times p_v &= a\tanh v\bigl(a\,\mathrm{sech}\,v\tanh v\boldsymbol{e}_1 - b\,\mathrm{sech}\,v\boldsymbol{e}_2 + a\,\mathrm{sech}^2 v\boldsymbol{e}_3\bigr)\\
&= a\tanh v\,\mathrm{sech}\,v(a\tanh v\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2 + a\,\mathrm{sech}\,v\boldsymbol{e}_3)\\
\nu &= a\tanh v\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2 + a\,\mathrm{sech}\,v\boldsymbol{e}_3\\
\nu_u &= b\boldsymbol{e}_1 + a\tanh v\boldsymbol{e}_2,\\
\nu_v &= a\,\mathrm{sech}^2 v\boldsymbol{e}_1 - a\,\mathrm{sech}\,v\tanh v\boldsymbol{e}_3.\\
p_u\cdot p_u &= a^2\,\mathrm{sech}^2 v + b^2 = a^2\,\mathrm{sech}^2 v + 1 - a^2 = 1 - a^2\tanh^2 v,\\
p_u\cdot p_v &= ab\tanh^2 v, \qquad p_v\cdot p_v = a^2\tanh^2 v,\\
-p_u\cdot\nu_u &= -a^2\,\mathrm{sech}\,v\tanh v, \qquad -p_v\cdot\nu_v = a^2\tanh v\,\mathrm{sech}\,v,\\
-p_u\cdot\nu_v &= -p_v\cdot\nu_u = ab\tanh v\,\mathrm{sech}\,v.
\end{aligned}$$

結論

$$p(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + (bu + a(v - \tanh v))\boldsymbol{e}_3.$$

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (1 - a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2 \\
I\!I &= \mathrm{sech}\,v\tanh v(-a^2du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2) \\
\widehat{I} &= \begin{pmatrix} 1 - a^2\tanh^2 v & ab\tanh^2 v \\ ab\tanh^2 v & a^2\tanh^2 v \end{pmatrix} \\
\widehat{I\!I} &= \mathrm{sech}\,v\tanh v \begin{pmatrix} -a^2 & ab \\ ab & a^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

パラメータ変換

$$p(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + (bu + a(v - \tanh v))\boldsymbol{e}_3.$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2 \\ II &= \mathrm{sech}\,v\tanh v(-a^2du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u,v) &= \left(\xi - \eta, \frac{a}{1+b}\xi + \frac{a}{1-b}\eta\right) \\ &\Rightarrow \\ ds^2 &= d\xi^2 + 2\cos\theta\,d\xi\,d\eta + d\eta^2, \\ II &= 2\sin\theta\,d\xi\,d\eta. \\ \theta &= 4\tan^{-1}\exp\left(-\alpha\xi - \frac{1}{\alpha}\eta\right), \qquad \alpha = \frac{1+b}{a} \end{aligned}$$

問題 2-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ に対して，$p(x,y) := {}^t\big(x, y, f(x,y)\big)$ と定める．

- p の第一基本行列 $\widehat{I}$，第二基本行列 $\widehat{II}$ を求めなさい．
- とくに点 $(x_0, y_0) \in U$ において p の単位法線ベクトルが ${}^t(0,0,1)$ に平行であるとき，(x_0, y_0) において $\widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}$ は対称行列であることを示しなさい．

グラフ表示

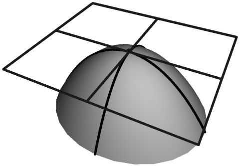
$$p(x,y) = {}^t\big(x, y, f(x,y)\big)$$

$$\begin{aligned}
p_x &= {}^t\big(1, 0, f_x\big), & p_{xx} &= {}^t\big(0, 0, f_{xx}\big) \\
p_y &= {}^t\big(0, 1, f_y\big), & p_{xy} &= {}^t\big(0, 0, f_{xx}\big), \quad p_{yy} = {}^t\big(0, 0, f_y y\big) \\
p_x \times p_y &= {}^t\big(-f_x, -f_y, 1\big), \\
\nu &= \frac{1}{\delta}{}^t\big(-f_x, -f_y, 1\big) & &\left(\delta = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\right) \\
\widehat{I} &= \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, & \widehat{II} &= \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

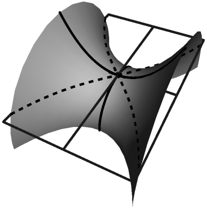
グラフ表示

$$p(x,y) = {}^t\big(x, y, f(x,y)\big)$$
$$\nu(x_0,y_0) /\!/ {}^t(0,0,1) \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$$

$$\widehat{I}\,(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \qquad \widehat{II}\,(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$



$\det \widehat{II} > 0$



$\det \widehat{II} < 0$