幾何学概論第二 (MTH.B212)

主曲率・ガウス曲率・平均曲率

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/12/22

設定

- U: uv-平面の領域；V: $\xi\eta$-平面の領域
- $\varphi\colon V \to U$：微分同相（パラメータ変換）
- P：ヤコビ行列
$$P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$\nu$：単位法線ベクトル
- $\tilde{p} := p \circ \varphi$；$\tilde{\nu} := \nu \circ \varphi$.
- $\check{p} := Rp + \boldsymbol{a},\ \ \check{\nu} := R\nu$ $(R \in \mathrm{O}(3),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$

$\mathrm{I\!I} = -dp \cdot d\nu$ (2次微分)

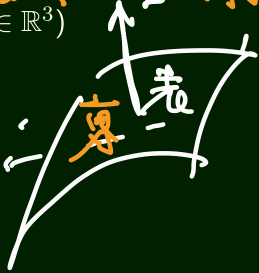
ひとつ指定する

曲面の向きづけ

パラメータ変換

合同変換

$\exists$ 向きづけ不可能曲面



第一基本量・第二基本量（復習）

(u v ν Font?)

第n基本行列

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$ ←対称

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v)$$

$$= - \begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & \underline{p_{uv} \cdot \nu} \\ \underline{p_{vu} \cdot \nu} & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

(固有値：実)

($III = d\nu \cdot d\nu$ 第3基本形式)

第一基本行列の正値性

事実 (事実 3.1)

第一基本行列 $\widehat{I}$ の固有値は正．とくに $\widehat{I}$ は正則である．

$\widehat{I}$ は実対称行列だから, 固有値は実数. とくに恒等式 $\det \widehat{I} = |p_u \times p_v|^2$ より $\det \widehat{I} > 0$. また $\operatorname{tr} \widehat{I} = |p_u|^2 + |p_v|^2 > 0$.

正則性

Cauchy Schwarz

$$\det \hat{I} = EG - F^2 = |p_u|^2|p_v|^2 - (p_u \cdot p_v)^2 \geq 0$$

$>$

p_u と p_v が1次独立

$$\operatorname{tr} \hat{I} = |p_u|^2 + |p_v|^2 > 0$$

$\Rightarrow$ 固有値 > 0

第一基本量・第二基本量の合同変換に関する不変性

Fact (事実 3.2)

第一基本行列，第二基本行列は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない．

こう決める

- $\check{p} := Rp + \boldsymbol{a}$, $\check{\nu} := R\nu$ $(R \in \mathrm{O}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$

  $\check{p}_u = Rp_u$, $\check{p}_v = Rp_v$ だから $\check{\nu}$ は $\check{p}$ の単位法ベクトル場．これを用いて $\check{p}$ の第一基本行列，第二基本行列を求めれば内積の直交行列による不変性により結論を得る．

$$\check{E} = \check{p}_u \cdot \check{p}_u = (Rp_u)\cdot(Rp_u) = p_u \cdot p_u$$

「直交行列は内積をたもつ」 etc.

$\det R = -1$ のとき

$$\nu = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

とおくと

$$\check{\nu} = R\nu = -\frac{\check{p}_u \times \check{p}_v}{|\check{p}_u \times \check{p}_v|}$$

第一基本形式・第二基本形式

(足をつける)

$$ds^2 := dp \cdot dp = (du, dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$II := -dp \cdot d\nu = (du, dv)\,\widehat{II}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

(パラメータ変換で不変)

といいくるめることができる

第一・第二基本形式のパラメータに関する不変性

$\tilde{p}(\xi,\eta) = p(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$

事実

第一基本形式，第二基本形式はパラメータ変換によらない．

正則曲面 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ の第一基本行列，第二基本行列をそれぞれ $\widetilde{\widehat{I}}$, $\widetilde{\widehat{II}}$ とおくと，チェイン・ルールから次が成り立つ：

$$\boxed{\widetilde{\widehat{I}} = {}^t P\,\widehat{I}\,P}, \quad \underline{\widetilde{\widehat{II}} = {}^t P\,\widehat{II}\,P}, \quad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}, \quad \left(\underline{P = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}}\right).$$

$$\tilde{p}_\xi = u_\xi p_u + v_\xi p_v$$
$$\tilde{p}_\eta = u_\eta p_u + v_\eta p_v$$

$$(\tilde{p}_\xi, \tilde{p}_\eta) = (p_\xi\ p_\eta)P$$

$$\tilde{\hat{I}} = \begin{pmatrix} {}^t\tilde{p}_\xi \\ {}^t\tilde{p}_\eta \end{pmatrix}(\tilde{p}_\xi\ \tilde{p}_\eta) = {}^tP\,\hat{I}\,P$$

$$\tilde{\hat{I}} = \boxed{{}^t P \hat{I} P} \qquad \tilde{\hat{II}} = {}^t P \hat{II} P$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{matrix} u_\xi d\xi + u_\eta d\eta \\ v_\xi d\xi + v_\eta d\eta \end{matrix} = \boxed{P \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}}$$

$$\tilde{\hat{E}} d\xi^2 + 2\tilde{\hat{F}} d\xi d\eta + \tilde{\hat{G}} d\eta$$

$$ds^2 = (d\xi \; d\eta)\, \tilde{\hat{I}} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{(d\xi \; d\eta)\, {}^t P}\, \hat{I}\, \boxed{P \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}} = (du \; dv)\, \hat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

ワインガルテン行列　Weingarten matrix.

定義

$\boxed{A := \widehat{I}^{-1}\widehat{II}}$ をワインガルテン行列とよぶ．　一般に対称でない．

合同変換に関する不変性： $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ が不変であることから従う．

パラメータ変換：

Jacobi行列

$\tilde{p}(\xi,\eta) := p\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ のワインガルテン行列

$\widetilde{A}$ は次を満たす： $\boxed{\widetilde{A} = P^{-1}AP}$

パラメータ変換で共役 (相似)

定理

- ワインガルテン行列の固有値，行列式，トレースはパラメータのとり方によらない．
- ワインガルテン行列の固有値は実数である．

曲面上の不変量．

$$\hat{\tilde{A}} = \hat{\tilde{T}}^{-1}\hat{\tilde{U}}$$

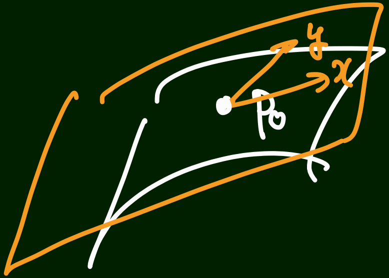
$$= ({}^tP\hat{T}P)^{-1}({}^tP\hat{U}P)$$

$$= P^{-1}\hat{T}^{-1}\cancel{{}^tP^{-1}\,{}^tP}\,\hat{U}P$$

$$= P^{-1}\hat{T}^{-1}\hat{U}P = P^{-1}AP$$

A, $P^{-1}AP$: 固有多項式が一致

Aの固有値は実.
(点 p_0 をひとつ固定)



・合同変換:

接平面が xy 平面になるようにできる

・パラメータ変換

$z = f(x, y)$ グラフ表示.

$\Rightarrow$ $\hat{\mathrm{I}}$, $\hat{\mathrm{II}}$: 対称行列 (問題2-2)

A は対称行列と共役 $\Rightarrow$ 固有値は実

主曲率・ガウス曲率・平均曲率

$p(u,v)$: 正則曲面

注 $A = \widehat{I}^{-1}\widehat{II}$

定義

ワインガルテン行列 A の ER

- 固有値 κ_1, κ_2 を<u>主曲率</u>という. principal curvature
- 主曲率の平均を<u>平均曲率</u>という: mean curvature.

$$H := \frac{1}{2}(\underline{\kappa_1+\kappa_2}) = \frac{1}{2}\,\underline{\operatorname{tr} A}.$$

注

- 主曲率の積を<u>ガウス曲率</u>という: Gaussian curvature

$$K = \underline{\kappa_1\kappa_2} = \underline{\det A} = \frac{\det\ \widehat{II}}{\det\ \widehat{I}}.$$

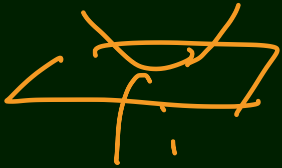
符号をふくめて いみがある.

die Krümmung

例

- 問題 1-1：${}^t(v, 3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv)$；$K = 0$（$6u^2 + v \neq 0$ のとき）
- 問題 1-2：${}^t(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$；$K = 1$, $H = \pm 1$.
  球面
- 問題 1-3：${}^t\left(a \cos v \cosh \frac{1}{a}u, a \sin v \cosh \frac{1}{a}u, u\right)$；$H = 0$
  Catenoid　　極小曲面
- 問題 2-1（Dini の擬球面）：$K = -1$

$\det \mathrm{II} < 0$



Aの固有値 κ_1 κ_2 ：実

∵ Aは対称行列に共役 → Aは対角化可能

- $H^2 - K = \frac{1}{4}(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - \kappa_1 \kappa_2$

$$= \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2$$

さい

$\kappa_1 = \kappa_2$ ： 臍点 (umbilic point) $\Leftrightarrow H^2 - K = 0$

へそ

$$\Leftrightarrow \underline{A = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \kappa = \kappa_1 = \kappa_2$$

∵ $\underline{Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}}$

問題 3-1

問題

0 を含む開区間で定義された二つの C^∞-級関数 φ, ψ に対して，xy-平面上の原点の近傍で定義された関数 $f(x,y) := \varphi(x) + \psi(y)$ のグラフ $p(x,y) := {}^t(x, y, f(x,y))$ は正則曲面を与える．この曲面の平均曲率が恒等的に零となる φ, ψ で $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．
（ヒント：xy-平面上の領域 U の各点 (x,y) で $\varphi(x) = \psi(y)$ が成り立つなら，この両辺は定数.）

移動曲面

問題 3-2

問題

正の定数 a, b, c に対して，集合

楕円面

$$S := \left\{ {}^t(x, y, z) \, ; \, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$x = f(y, z)$

は，次の意味でなめらかな曲面を与える：

任意の点 $\mathrm{P} \in S$ に対して，$\mathbb{R}^3$ における P の近傍 V と，$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された曲面の正則パラメータ表示 $p \colon U \to \mathbb{R}^3$ が存在して，$p(U) = V \cap S$ が成り立つ．

とくに $0 < a < b < c$ のとき，S のガウス曲率 K，平均曲率 H が $\boxed{H^2 - K = 0}$ を満たすような S 上の点を求めなさい．

umbilic pt

$$\left(A = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \right)$$

本日の課題の提出締切は

2022年12月26日（月曜日）07:00 JST

よいお年をお迎えください