

# 幾何学概論第二 (MTH.B212)

主曲率・ガウス曲率・平均曲率

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/>

東京工業大学理学院数学系

2022/12/22

# 設定

- ▶  $U$ :  $uv$ -平面の領域 ;  $V$ :  $\xi\eta$ -平面の領域
- ▶  $\varphi: V \rightarrow U$ : 微分同相 (パラメータ変換)
- ▶  $P$ : ヤコビ行列

$$P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

- ▶  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ : 正則曲面 ;  $\nu$ : 単位法線ベクトル
- ▶  $\tilde{p} := p \circ \varphi$ ;  $\tilde{\nu} := \nu \circ \varphi$ .
- ▶  $\check{p} := Rp + \mathbf{a}$ ,  $\check{\nu} := R\nu$  ( $R \in O(3)$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ )

## 第一基本量・第二基本量（復習）

$$\hat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{II} &:= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) \\ &= - \begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# 第一基本行列の正値性

## 事実 (事実 3.1)

第一基本行列  $\hat{I}$  の固有値は正. とくに  $\hat{I}$  は正則である.

$\hat{I}$  は実対称行列だから, 固有値は実数. とくに恒等式  $\det \hat{I} = |p_u \times p_v|^2$  より  $\det \hat{I} > 0$ . また  $\operatorname{tr} \hat{I} = |p_u|^2 + |p_v|^2 > 0$ .

# 第一基本量・第二基本量の合同変換に関する不変性

## Fact (事実 3.2)

第一基本行列, 第二基本行列は  $\mathbb{R}^3$  の合同変換によらない.

▶  $\check{p} := Rp + \mathbf{a}, \check{\nu} := R\nu$  ( $R \in O(3), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ )

$\check{p}_u = Rp_u, \check{p}_v = Rp_v$  だから  $\check{\nu}$  は  $\check{p}$  の単位法ベクトル場. これを用いて  $\check{p}$  の第一基本行列, 第二基本行列を求めれば内積の直交行列による不変性により結論を得る.

## 第一基本形式・第二基本形式

$$ds^2 := dp \cdot dp = (du, dv) \hat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

$$II := -dp \cdot d\nu = (du, dv) \hat{II} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2.$$

# 第一・第二基本形式のパラメータに関する不変性

## 事実

第一基本形式，第二基本形式はパラメータ変換によらない。

正則曲面  $\tilde{p}(\xi, \eta)$  の第一基本行列，第二基本行列をそれぞれ  $\tilde{I}$ ， $\tilde{II}$  とおくと，チェイン・ルールから次が成り立つ：

$$\tilde{I} = {}^t P \hat{I} P, \quad \tilde{II} = {}^t P \hat{II} P, \quad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}, \quad \left( P = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right).$$

# ワインガルテン行列

## 定義

$A := \hat{I}^{-1} \hat{\Pi}$  をワインガルテン行列とよぶ。

合同変換に関する不変性： $\hat{I}$ ,  $\hat{\Pi}$  が不変であることから従う。

パラメータ変換：

$\tilde{p}(\xi, \eta) := p(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$  のワインガルテン行列

$\tilde{A}$  は次を満たす： $\tilde{A} = P^{-1}AP$

## 定理

- ▶ ワインガルテン行列の固有値，行列式，トレースはパラメータのとり方によらない。
- ▶ ワインガルテン行列の固有値は実数である。



# 主曲率・ガウス曲率・平均曲率

$p(u, v)$ : 正則曲面

## 定義

ワインガルテン行列  $A$  の

- ▶ 固有値  $\kappa_1, \kappa_2$  を主曲率という.
- ▶ 主曲率の平均を平均曲率という:

$$H := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A.$$

- ▶ 主曲率の積をガウス曲率という:

$$K := \kappa_1 \kappa_2 = \det A = \frac{\det \widehat{II}}{\det \widehat{I}}.$$

## 例

- ▶ 問題 1-1 :  $t(v, 3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv)$  ;  $K = 0$  ( $6u^2 + v \neq 0$  のとき)
- ▶ 問題 1-2 :  $t(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$  ;  $K = 1$ ,  $H = \pm 1$ .
- ▶ 問題 1-3 :  $t(a \cos v \cosh \frac{1}{a}u, a \sin v \cosh \frac{1}{a}u, u)$  ;  $H = 0$
- ▶ 問題 2-1 (Dini の擬球面) :  $K = -1$

## 問題 3-1

### 問題

0 を含む开区間で定義された二つの  $C^\infty$ -級関数  $\varphi, \psi$  に対して,  $xy$ -平面上の原点の近傍で定義された関数  $f(x, y) := \varphi(x) + \psi(y)$  のグラフ  $p(x, y) := {}^t(x, y, f(x, y))$  は正則曲面を与える. この曲面の平均曲率が恒等的に零となる  $\varphi, \psi$  で  $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0, \varphi'(0) = 0, \psi'(0) = 0$  を満たすものを求めなさい.

(ヒント:  $xy$ -平面上の領域  $U$  の各点  $(x, y)$  で  $\varphi(x) = \psi(y)$  が成り立つなら, この両辺は定数.)

## 問題 3-2

### 問題

正の定数  $a, b, c$  に対して, 集合

$$S := \left\{ t(x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

は, 次の意味でなめらかな曲面を与える:

任意の点  $P \in S$  に対して,  $\mathbb{R}^3$  における  $P$  の近傍  $V$  と,  $\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  で定義された曲面の正則パラメータ表示  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  が存在して,  $p(U) = V \cap S$  が成り立つ.

とくに  $0 < a < b < c$  のとき,  $S$  のガウス曲率  $K$ , 平均曲率  $H$  が  $H^2 - K = 0$  を満たすような  $S$  上の点を求めなさい.