2022 年 12 月 22 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 3

■前回の補足

- 以下の質問について：● 第一基本量・第二基本量から曲面はきまるのか; ● 第一基本量・第二基本量はなぜ「基本量か」．なぜ 2 つあるのか．● 第一基本量を与えられれば曲面は決まるのか．
  第一基本量と第二基本量が曲面を定めます．ただしこれらは独立ではありません．「曲面論の基本定理」（第 5 回）で説明します．

■前回までの訂正

- 黒板 B，問題 1-2 の解説：$p_u \times p_v = \cos v \boldsymbol{e}_1 + \cos v \sin v \boldsymbol{e}_3 \Rightarrow p_u \times p_v = \cos^2 v \boldsymbol{e}_1 + \cos v \sin v \boldsymbol{e}_3$

■授業に関する御意見

- 3Q の試験の出来が良くなかったので，個人的には p の値をなるべく小さくしたいのですが，0.3 未満にすることは可能でしょうか． **山田のコメント：** 2020 年度にやってみたのですが，安全策をとって $p = 0$ とする方がほとんどで，試験が意味をなさなくなってしまったので，0.3 を下限にしています．
- 教室のドアのたてつけって直りますか．後から入ってきた人のばつの悪さがより強くでてしまって気になります． **山田のコメント：** ばつの悪さは当方が「いじる」からかも．建付けは申し入れておきます（たぶん学期中には直らないと思います）．
- 教室の入口が黒板側にあるので，教室に入るときに目立ってしまい，授業開始時刻にギリギリ間に合っても視線を感じ，遅刻をした気分になります． **山田のコメント：** 構造上問題ありですね．
- 前回カゼで出席できなかったので，資料が充実していて救われました． **山田のコメント：** よかったです．
- 他の授業と違って録画があるので，公欠した授業が受けられて嬉しかった． **山田のコメント：** お役にたてて幸いです．
- 講義のスピードがすさまじいことになっていて手首が痛くなりましたが，脇道に反れまくるのも大学の講義らしいかなと思いました． **山田のコメント：** すみません．
- 一応課題は解けているのですが，ただ計算しているだけで本当の意味が理解できていない気がする． **山田のコメント：** その部分を授業で解説しているつもり．
- 物理等では，du 等をただの数のように扱っているのがどうして良いか分かっていないままなので，わかるようにしたいです． **山田のコメント：** 難しいですね．数と思って「いいかげん」に扱う際，何をやってよいか判断できるためには慣れが必要かも．
- 授業での説明が丁寧で，課題の解説では背景知識まで話していただけるので非常に分かりやすいです． **山田のコメント：** ありがとうございます．
- 前回の課題を 3Q の用紙で提出していたことに今気づきました． **山田のコメント：** 気づきませんでした．
- ここで聞くことではないかもしれませんが，先生は数学を教えるにあたって特に意識していることはありますか． **山田のコメント：** 手を動かしてもらう．

■質問と回答

質問 1： 第一基本量からは長さ・角度・面積が，第一基本量と第二基本量を組み合わせて定義されるワインガルテン行列からはガウス曲率や平均曲率といった曲面の形状に関する情報がわかるようですが，第二基本量だけからわかる曲面の重要な情報はなにかありますか． **お答え：**たとえば（局所）凸性．問題 2-2 参照．

質問 2： 第一基本量で接ベクトルの長さや角度を表せるとありましたが，第二基本量では何を表せるのでしょうか．問題 2-2 では $\widehat{II}$ を求めたときにヘッセ行列のような形になるので，曲面の曲がり具合を表せると思ったのですが，実際はどうなのでしょうか． **お答え：**そのとおり．もう少しつめてみよう．

質問 3： 単位法ベクトルのとり方は 2 種類あるから，第二基本量も 2 通り存在するのですか． **お答え：**はい．

質問 4： 単位法ベクトルの定義で，正負をどちらにしてもよいとなっていますが，どちらか一方に制限しないのはそれぞれに対して便利になる場面があるということでしょうか．それともどちらの定義も本質的に同じなのでしょうか．

お答え： 本質的に同じとは？ 曲面の向きに関係する．単位法線ベクトルを一つ選ぶことが曲面の向きを指定すること．

質問 5： 第一基本行列，第二基本行列がもつ特別な性質はあるか． **お答え：**たとえば $\widehat{I}$ は正定値．

質問 6： 第一基本形式により曲面の面積を与えることができたが，第二基本形式は？ 与えられるものはあるのか？ **お答え：**曲率．

質問 7： 等温座標系では，第一基本行列において $E = G$, $F = 0$ であるが，このように第一基本行列によって特徴づけられるものは他にあるのか？ **お答え：**「もの」は座標系のことでしょうか．

質問 8： 第一，第二基本形式は，E, F, G, L, M, N を 1 つの式で見渡せて便利だから導入されているのでしょうか．

お答え： 「パラメータのとり方に依らない」と言い張るためにこの形にしています．

質問 9： 例えば $p(u, v) = (u, v, 0)$ とすれば $II = 0$ となるので，p が平面であれば $II = 0$ となるはずですが，他に $II = 0$ となるような p は存在するのでしょうか． **お答え：**$II = 0$ なら平面（の一部）．

質問 10： 第一基本形式および第二基本形式はどのようにして概念が生まれたのでしょうか．

お答え： どういうアイデアかはともかく Gauss によるようです．

質問 11： ds^2 の幾何学的意味はどのようなものですか．単純に 2 点間の距離を表すものでしょうか．また物理に世界間隔 ds^2 というものがありますが，これと関係はありますか． **お答え：**$\mathrm{Span}\{p_u, p_v\}$ の内積を表す．後半：同じ．

質問 12： 第一基本量，第二基本量ともに正則曲面以外でも求められることがありそうですが，正則曲面以外でも基本量を定義することがありますか？ するとしたらどういった意味を持つ値なのでしょうか． **お答え：**特異点をもつ曲面で，単位法線ベクトル場 ν が意味をもつ場合（フロンタルや波面；たとえば問題 1-1 や問題 2-1 の例）は第一・第二基本形式が定義できる．「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」（梅原・佐治・山田；丸善）参照．

質問 13： 第一基本量 E, G, F について $E = G = 1$, $F = 0$ なら uv 平面上の曲線の長さと，それに対応する曲面上の曲線の長さが一致するのであれば，この場合に限って曲面上の弧長パラメータのようなものが設定できそうに思えますが，実際どうでしょうか． **お答え：**はい，実際，そういうパラメータがあれば曲面と平面は曲線の長さを保って対応づけられる（正確な地図ができる）わけですが，一般にはそれは不可能です（ガウスの驚異の定理，第 5 回）．

質問 14： 第一基本量を用いて曲面上の角度と長さを表せますが，これと平面上での角度と長さを用いてその曲面の曲がり具合を表せますか． **お答え：**Yes かつ No．今回から 5 回めまでで説明します．

質問 15： $\mathbb{R}^3$ の内積を制限するというのはどういう意味ですか？ **お答え：**内積空間 $(V, (\ ,\ ))$ の部分空間 W に対して，$(\ ,\ )_W$ を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_W := (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W)$ とすると $(\ ,\ )_W$ は W の内積．これが $(\ ,\ )$ の W への制限．

質問 16： 授業では du, dv を単なる記号とみなすとありましたが，本当に単なる記号では和，積等を行っていいのか疑問です．「Δf などを df と略記して，$df = f_u\,du + f_v\,dv + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2})$ の $o(\dots)$ の部分はほとんどの場面でなくなるから初めから書かない」という説明ではだめなのでしょうか？ または同値関係をとってその同値類を df と書くという説明はできないのでしょうか． **お答え：**前半：「なくなる」が定義できない．後半：多様体論では du, dv は余接空間 T_p^*U の基底，積 $du\,dv$ はそれらのテンソル積の対称化，と説明できる（が気にしない）．

質問 17： 微分形式としての du, dv などは，微分 dy/dx や，積分 $\int f(x)\,dx$ の dx, dy と関係していますか？

お答え： はい，このあたり，多様体論できちんと扱うはずです．

質問 18： $\{p_u, p_v, \nu\}$ を $\mathbb{R}^3$ の基底として考えることができますが，実際にこの基底をとることはあるのでしょうか．（複雑すぎて基底とは考えない？） **お答え：**それが Gauss 枠．微分して Gauss-Weingarten の式（第 5 回）を得る．

質問 19： 第三基本量もあるのか．もしあるのなら，第一基本量は p の 1 階偏微分の内積，第二基本量は p, ν それぞれの 1 階偏微分の内積となっているので，第三基本量は ν の一階偏微分の内積と定義するのが自然かなと思いました．

お答え： はい．そうです：$I\!I\!I = d\nu \cdot d\nu$．

質問 20： 前回，質問 25（S^2 に正則パラメータ表示はあるか）を訊きましたが，やや言葉足らずでした．授業内で，コンパクト性に注目して $\mathbb{R}^2$ の領域と S^2 の間に同相写像がないことをおっしゃっていたので，なら（自己交叉を許した）単なる正則パラメータ表示はあるのか気になったということです．例えば S^1 に $\mathbb{R}^1$ をぐるぐる巻きつける写像 γ (i.e. $\gamma(\theta) = {}^t(\cos\theta, \sin\theta)$) $(\theta \in \mathbb{R})$ は C^∞-級かつつねに $\gamma' = {}^t(0, 0)$ ですが，同じように $\mathbb{R}^2$ の領域から S^2 への全射 p で C^∞-級かつ p_u と p_v が一次独立なものがあるのか気になります．

お答え： ない．実際，正則な全射 $p : \mathbb{R}^2 \supset U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の第一基本形式は U にリーマン計量を与え，p は局所等長写像．一般論から，局所等長写像は被覆写像だが，S^2 は単連結だから単射．とくに U と S^2 は同相となり，矛盾．

質問 21： 3Q で局所的，大域的な性質というお話がありましたが，曲面論においても局所的・大域的という観点に基づいて曲面の性質を分類することはありますか．もしあるとするなら，例えば第一基本量，第二基本量は接ベクトルで定義されるものなので局所的な性質なのではないかと思いました． **お答え：**そうです．最終回に言及します．

質問 22： 問題 2-2 の最後に出てきた行列 $\widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I}$ はテキストでいうところのワインガルテン行列だと思いますが，それが対称行列になる曲面はどんな特別な性質を持っているのでしょうか． **お答え：**ワインガルテン行列の対称性は曲面の性質ではなく，パラメータ表示の性質．この状況はどんな曲面でも作れます（補題 3.7）．

質問 23： 問題 1-2 の解説で η の範囲が $-\infty$ から $+\infty$ とおっしゃっていましたが，スライド 8/16 枚目の左の地図は，縦軸が v で範囲が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ であるのに対し，右のメルカトール世界地図は縦軸が η で本当は縦方向に地図がずっと伸びているのですか？ **お答え：**はい．$\eta = \log((1 + \tan\frac{v}{2})/(1 - \tan\frac{v}{2})$ なので $v \to \pm\frac{\pi}{2}$ なら $\eta \to \pm\infty$．

質問 24： 講義資料 6 ページの 3 行目に「$\overline{D}$ が有界であるような領域 $D \subset U$」云々とありますが，D が有界であるにもかかわらず $\overline{D}$ が有界でない例があるのでしょうか． **お答え：**ありません．

質問 25： 微妙に表記がわかりづらかった部分の確認ですが，正則曲面 $p(u, v)$ において「$|p_u| = |p_v|$ かつ $p_u \cdot p_v \leftrightarrow (u, v)$（山田注：$p_u \cdot p_v = 0$）は曲面の等温座標系（共形座標系）」という意味ですか？ あるいは「$|p_u| = |p_v| \leftrightarrow (u, v)$ は曲面の等温座標系」，「$p_u \cdot p_v \leftrightarrow (u, v)$ は曲面の共形座標系」という意味ですか？ **お答え：**前者．

質問 26： 第一基本量という言葉は E, F, G の組を指すのか，それぞれをすべて第一基本量と呼ぶのかどちらですか？現時点では後者と理解していますが，この場合，具体的関数として書き下す時などに区別するのに不便な気がします．たとえば上の答案（略）で $E = p_u \cdot p_u \dots$ を省略して $E = \dots$ と書いても $(1, 1)$ 成分だと伝わりますか．

お答え： 前半：後者．後半：この文脈では OK．一般には「第一基本行列の $(1, 1)$-成分 E は」などと書くのが親切．

質問 27： ds と ds^2 の違いは何でしょうか？ **お答え：**$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$．1 乗と 2 乗の違い．

質問 28： TeX で第 2 基本形式をどのように出力していますか？ ぼくは I（アイ）を 2 つ重ねて II としているのですが，厚ぼったい感じで格好が悪いです． **お答え：**`\newcommand{\secondff}{\mbox{$I\!I$}}`

質問 29： パラメータ変換の補題がよくわかりませんでした． **お答え：**どのへんが？

3 主曲率・ガウス曲率・平均曲率

ここでは断りのない限り $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された正則曲面, ν を p の単位法ベクトル場とする．さらに $\varphi\colon V \ni (\xi,\eta) \mapsto \varphi(\xi,\eta) = (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ を領域 $V \subset \mathbb{R}^2$ から U への微分同相，$\tilde p := p\circ\varphi$, $\check p := Rp + \boldsymbol{a}$ ($R \in \mathrm{O}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$)，$\tilde p$, $\check p$ の単位法ベクトル場として，それぞれ $\tilde\nu := \nu\circ\varphi$, $\check\nu := R\nu$ をとる．

■第一・第二基本形式（復習） 正則曲面 p の第一基本行列 $\widehat{I}$, 第二基本行列 $\widehat{I\!I}$ は次のように定義された：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v \\ p_v\cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$
$$\widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) = -\begin{pmatrix} p_u\cdot \nu_u & p_u\cdot \nu_v \\ p_v\cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu}\cdot \nu & p_{uv}\cdot \nu \\ p_{vu}\cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

事実 3.1. 第一基本行列 $\widehat{I}$ の固有値は正．とくに $\widehat{I}$ は正則である．

$\widehat{I}$ は実対称行列だから，固有値は実数．とくに恒等式 $\det \widehat{I} = |p_u \times p_v|^2$ より $\det \widehat{I} > 0$．また $\operatorname{tr} \widehat{I} = |p_u|^2 + |p_v|^2 > 0$.

事実 3.2. 第一基本行列，第二基本行列は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない．

$\check p_u = Rp_u$, $\check p_v = Rp_v$ であるから $\check\nu := R\nu$ とおけば，R が直交行列であることから $\check\nu$ は $\check p = Rp + \boldsymbol{a}$ の単位法ベクトル場．これを用いて $\check p$ の第一基本行列，第二基本行列を求めれば内積の直交行列による不変性により結論を得る．

さらに第一基本形式 ds^2，第二基本形式 $I\!I$ を次で定義した：

$$ds^2 := dp\cdot dp = (du, dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$I\!I := -dp\cdot d\nu = (du, dv)\,\widehat{I\!I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

事実 3.3. 第一基本形式，第二基本形式はパラメータ変換によらない．

正則曲面 $\tilde p(\xi,\eta)$ の第一基本行列，第二基本行列をそれぞれ $\widetilde{\widehat{I}}$, $\widetilde{\widehat{I\!I}}$ とおくと，チェイン・ルールから次が成り立つ：

$$\widetilde{\widehat{I}} = {}^tP\,\widehat{I}\,P, \qquad \widetilde{\widehat{I\!I}} = {}^tP\,\widehat{I\!I}\,P, \qquad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}, \qquad \left(P = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\right).$$

■ワインガルテン行列 正則曲面 p に対して，次の 2×2-行列値関数 A を**ワインガルテン行列**とよぶ.

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

定理 3.4 (ワインガルテンの公式)**.** $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$.

証明： $\nu\cdot\nu = 1$ の両辺を u, v で微分すると $\nu \perp \nu_u$, $\nu \perp \nu_v$．したがって ν_u, ν_v は p_u, p_v の線形結合：$(\nu_u, \nu_v) = (p_u, p_v)B$. ただし B は 2×2-行列値関数．両辺に (p_u, p_v) の転置行列を左から掛けると $-\widehat{I\!I} = \widehat{I}B$.

補題 3.5. (a) ワインガルテン行列は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない．

(b) ワインガルテン行列の固有値はパラメータ変換によらない．

証明： $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$ が合同変換によらないので (a) が従う．パラメータ変換により得られる曲面 $\tilde p$ のワインガルテン行列は $\widetilde{A} = \widetilde{\widehat{I}}^{-1}\,\widetilde{\widehat{I\!I}} = ({}^tP\,\widehat{I}\,P)^{-1}({}^tP\,\widehat{I\!I}\,P) = P^{-1}AP$ なので (b) を得る．

2022 年 12 月 22 日

定義 3.6. ワインガルテン行列の固有値の積 K を**ガウス曲率**，固有値の平均 H を**平均曲率**という：$K := \det A = \det \widehat{I\!I} \,/\, \det \widehat{I}$, $H := \frac{1}{2} \operatorname{tr} A$.

■例：グラフ表示　関数 $f(x,y)$ のグラフ $p(x,y) = {}^t(x,y,f(x,y))$ に対して $\delta := 1 + f_x^2 + f_y^2$ とおくと $\nu(x,y) = {}^t(-f_x,-f_y,1)/\delta^{1/2}$ は単位法線ベクトル場．このとき（問題 2-2 参照）

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{\delta^2}, \quad H = \frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{2\delta^{3/2}}.$$

補題 3.7. 正則曲面 $p(u,v)$ が (u_0,v_0) において $p(u_0,v_0) = \mathrm{O}$（座標原点），$\nu(u_0,v_0) = \pm{}^t(0,0,1)$ を満たしているならば，座標変換 $\varphi := (x,y) \mapsto (u(x,y),v(x,y))$（$\varphi(0,0) = (u_0,v_0)$）と $(0,0)$ の近くで定義された C^∞-級関数 $f(x,y)$ が存在して次が成り立つ：

$$\tilde{p}(x,y) = p \circ \varphi(x,y) = {}^t(x,y,f(x,y)), \qquad f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

証明： $p(u,v) = {}^t(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と書くと，$p_u \times p_v$ の第 3 成分が (u_0,v_0) において零でないことにより $(u,v) \mapsto (x(u,v),y(u,v))$ は (u_0,v_0) の近傍で微分同相写像となる（逆写像定理）．その逆写像を $\varphi(x,y) = (u(x,y),v(x,y))$，$f(x,y) := z \circ \varphi(x,y)$ とおくと結論が満たされる．

系 3.8. ワインガルテン行列の固有値は実数である．これらを p の**主曲率**という．

証明： 点 (u_0,v_0) を固定すると，$\mathbb{R}^3$ の合同変換で補題 3.7 の状況が満たされる．このグラフ表示の原点で $\widehat{I}$ が単位行列となるから A は対称行列.

例 3.9. 問題 1-1 において，$6u^2 + v \neq 0$ のとき $K = 0$, $H = \pm\frac{1+4u^2+u^4}{4(1+u^2+u^4)^{3/2}(6u^2+v)}$．問題 1-2 において $K = 1$, $H = \pm 1$, 問題 1-3 において $K = -\operatorname{sech}^4(u/a)/a^2$, $H = 0$ 問題 2-1 において $K = -1$, $H = \pm(\operatorname{cosech} v - \sinh v)/2$.

問題

3-1 0 を含む開区間で定義された二つの C^∞-級関数 φ, ψ に対して，xy-平面上の原点の近傍で定義された関数 $f(x,y) := \varphi(x) + \psi(y)$ のグラフ $p(x,y) := {}^t(x,y,f(x,y))$ は正則曲面を与える．この曲面の平均曲率が恒等的に零となる φ, ψ で $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．（ヒント：xy-平面上の領域 U の各点 (x,y) で $\varphi(x) = \psi(y)$ が成り立つなら，この両辺は定数.）

3-2 正の定数 a, b, c に対して，集合

$$S := \left\{ {}^t(x,y,z)\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

は，次の意味でなめらかな曲面を与える：

任意の点 $\mathrm{P} \in S$ に対して，$\mathbb{R}^3$ における P の近傍 V と，$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された曲面の正則パラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が存在して，$p(U) = V \cap S$ が成り立つ.

実際，$\mathrm{P} = {}^t(\xi,\eta,\zeta) \in S$ が $\zeta \neq 0$ を満たすなら，陰関数定理より P の近傍で S は $z = f(x,y)$ とグラフ表示される．$\zeta = 0$ のときは，ξ, η のいずれかが零でないので，同様の議論で結論が得られる（端折っているので各自確かめよ．ただしこれは課題ではない）．とくに $0 < a < b < c$ のとき，S のガウス曲率 K，平均曲率 H が $H^2 - K = 0$ を満たすような S 上の点を求めなさい.