幾何学概論第二 (MTH.B212)

平均曲率・ガウス曲率の幾何学的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/05

問題 3-1

問題

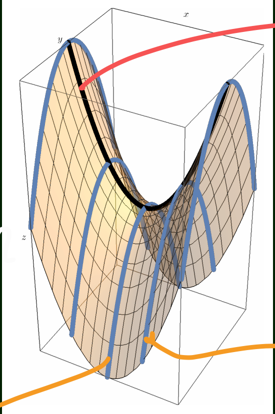
0 を含む開区間で定義された二つの C^∞-級関数 φ, ψ に対して，xy-平面上の原点の近傍で定義された関数 $\boxed{f(x,y) := \varphi(x) + \psi(y)}$ のグラフ $p(x,y) := {}^t(x, y, f(x,y))$ は正則曲面を与える．この曲面の平均曲率が恒等的に零となる φ, ψ で $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．
（ヒント：xy-平面上の領域 U の各点 (x,y) で $\varphi(x) = \psi(y)$ が成り立つなら，この両辺は定数.）

極小曲面

移動曲面 translation surface

- 関数 $f(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)$ のグラフで表される曲面を**移動曲面**という．

xz平面上の曲線にそって yz平面上の曲線を移動させて得られる



$z=x^2-y^2$

$\boxed{y=0}$

$z=x^2$

$x=1$

$z=1-y^2$

$x=0$

$z=-y^2$

グラフ表示の平均曲率

$$p(x,y) := {}^t(x, y, f(x,y))$$

- $p_x = {}^t(1, 0, f_x)$, $p_y = {}^t(0, 1, f_y)$
- $\nu = \frac{1}{\delta}{}^t(-f_x, -f_y, 1)$, $\delta = \underline{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$
- $p_{xx} = {}^t(0, 0, f_{xx})$, $p_{xy} = {}^t(0, 0, f_{xy})$, $p_{yy} = {}^t(0, 0, f_{yy})$

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{II} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$A = \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} = \frac{1}{\delta^3}\begin{pmatrix} (1 + f_y^2) f_{xx} - f_x f_y f_{xy} & * \\ * & (1 + f_x^2) f_{yy} - f_x f_y f_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2\delta^3}\underline{\left((1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}\right)}}$$

極小曲面

- 平均曲率が恒等的に零であるような曲面を極小曲面という.

minimal surface

- グラフ ${}^t(x, y, f(x, y))$ が極小曲面 $\Leftrightarrow$

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0$$

極小曲面方程式

- 移動曲面 ${}^t(x, y, \varphi(x) + \psi(y))$ が極小曲面 $\Leftrightarrow$

$$(1 + \psi'^2)\varphi'' + (1 + \varphi'^2)\psi'' = 0$$

$$(1+\psi'^2)\varphi'' + (1+\varphi'^2)\psi'' = 0$$

$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = 0$

$$\underbrace{\frac{\varphi''}{1+\varphi'^2}}_{x\text{のみ}} = \underbrace{-\frac{\psi''}{1+\psi'^2}}_{y\text{のみ}} = k:\text{定数}$$

至(曲)

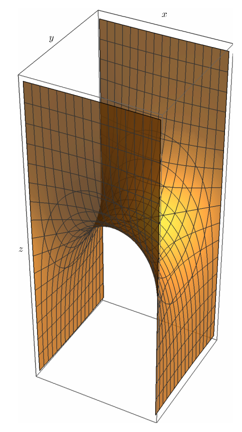
(1) $k=0$: $\varphi''=0$, $\psi''=0 \Rightarrow \varphi=0, \psi=0$

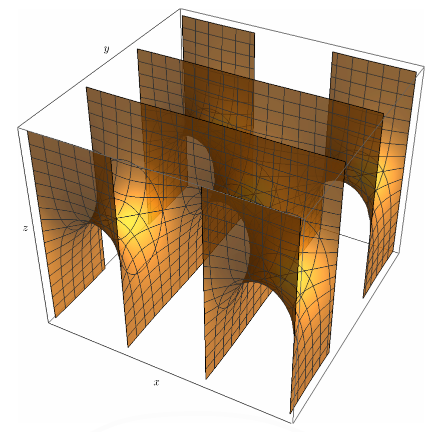
(2) $k\neq 0$ $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi'' dx}{1+\varphi'^2} = \int_0^x k\,dx$ $\tan^{-1}\varphi' = kx$

$\varphi' = \tan kx$ $\left(\begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{k}\log\cos kx \\ \psi = \frac{1}{k}\log\cos ky \end{array} \right)$

シャーク曲面

$f(x,y)=\frac{1}{k}\left(\log\cos kx-\log\cos ky\right)$





$$z=\log\frac{\cos x}{\cos y}$$

$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos y\cdot e^{z}=\cos x$$

陰関数表示

陰関数定理

定理 (陰関数定理)

- $F\colon \mathbb{R}^3 \supset U \ni {}^t(x,y,z) \mapsto F(x,y,z) \in \mathbb{R}$: C^∞
- $F(\mathrm{P}) = 0,\ \ F_z(\mathrm{P}) \neq 0$ $\bigl(\mathrm{P} := {}^t(x_0,y_0,z_0) \in U\bigr)$

$\Rightarrow$

- $\exists\, V \subset U$ ：P の近傍；
- $\exists\, W \subset \mathbb{R}^2$ ：(x_0, y_0) の近傍；
- $\exists f\colon W \to \mathbb{R}$ ：C^∞

で次を満たす：

$$\{\mathrm{Q} \in V\,;\, F(\mathrm{Q}) = 0\} = \left\{{}^t\bigl(x, y, f(x,y)\bigr)\,;\, {}^t(x,y) \in W\right\}.$$

陰関数定理

定理 (陰関数定理)

いいかげん version

- $F\colon \mathbb{R}^3 \supset U \ni {}^t(x,y,z) \mapsto F(x,y,z) \in \mathbb{R}$: C^∞
- $F(\mathrm{P}) = 0$, $F_z(\mathrm{P}) \neq 0$ $(\mathrm{P} := {}^t(x_0, y_0, z_0) \in U)$

$\Rightarrow \{{}^t(x,y,z)\,;\, F(x,y,z) = 0\}$ は点 P の十分近くで $z = f(x,y)$ とグラフ表示される.

$F_x \neq 0 \rightarrow x = g(y,z)$

系

- $F\colon \mathbb{R}^3 \supset U \ni {}^t(x,y,z) \mapsto F(x,y,z) \in \mathbb{R}$: C^∞
- $S := \{{}^t(x,y,z)\,;\, F(x,y,z) = 0\} \neq \emptyset$
- $dF = (F_x, F_y, F_z) \neq \mathbf{0}$ が S 上で成り立つ

$\Rightarrow S$ は「なめらかな曲面」

例：シャーク曲面

$S = \{ {}^t(x, y, z) \,;\, \cos y \cdot e^z = \cos x \}$ は滑らかな曲面.

$$F(x, y, z) = \cos y \cdot e^z - \cos x \qquad S := F^{-1}(\{0\})$$

- $F_x = \sin x$

  $F_y = -e^z \sin y \quad \Rightarrow \quad (F_x \; F_y \; F_z) \neq (0, 0, 0)$

  $F_z = e^z \cos y \qquad F_y^2 + F_z^2 = e^{2z} > 0$

問題 3-2

$F_x = \dfrac{2x}{a^2}$

$F_y = \dfrac{2y}{b^2}$

$F_z = \dfrac{2z}{c^2}$

問題

正の定数 $a,\ b,\ c$ に対して，集合

$F =$

$$S := \left\{ {}^t(x, y, z)\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

は，次の意味でなめらかな曲面を与える：
任意の点 $\mathrm{P} \in S$ に対して，$\mathbb{R}^3$ における P の近傍 V と，$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された曲面の正則パラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が存在して，$p(U) = V \cap S$ が成り立つ．

とくに $0 < a < b < c$ のとき，S のガウス曲率 K，平均曲率 H が $H^2 - K = 0$ を満たすような S 上の点を求めなさい．

$(F_x\ F_y\ F_z) = (0,0,0)$

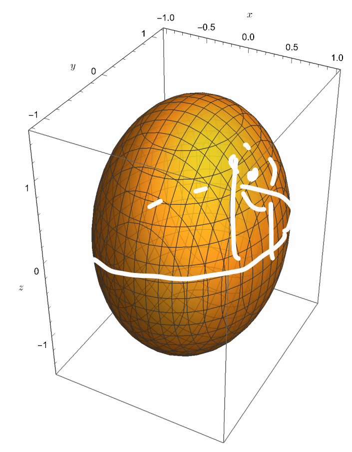
$\Rightarrow (x, y, z) = (0,0,0) \notin S$

楕円面

ellipsoid

$$F(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$0 < a < b < c$



臍点

Aの固有値 $\kappa_1 = \kappa_2$

臍点：ふたつの主曲率が一致する点.

補題

Aは対角化可能

臍点 $\Leftrightarrow H^2 - K = 0 \Leftrightarrow A = \kappa I$

Iは単位行列

$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ $K = \kappa_1 \kappa_2$

$H^2 - K = \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2$

$\left(A = \kappa I = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \right.$ となる点 $\left. ? \right)$

楕円面の臍点

$$S := \left\{ {}^t(x,y,z)\,;\, F(x,y,z) = 0 \right\}, \qquad F(x,y,z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

$F_z = 0$ on $z = 0$

- $S' := S \cap \{z \neq 0\}$ 上の各点で $z = f(x,y)$ とグラフ表示する.

$F_{xy} = F_{yz} = F_{zx} = 0$

$$A = \star \begin{pmatrix} (F_y^2 + F_z^2)F_{xx} + F_x^2 F_{zz} & F_x F_y (F_{zz} - F_{yy}) \\ F_x F_y (F_{zz} - F_{xx}) & (F_x^2 + F_z^2) F_{xx} + F_y^2 F_{zz} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}$$

$\cdot\; F(x, y, f(x,y)) = 0$

$$F(x, y, f(x,y)) = 0$$

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$f_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

$(x, y, f(x,y))$

$$F_x + f_x F_z = 0$$

$$F_y + f_y F_z = 0$$

$$F_{xx} + f_x F_{xz} + f_x F_{zx} + f_x^2 F_{zz} + f_{xx} F_z = 0$$

$$f_{xx} = \frac{-1}{F_z^3}\left(F_z^2 F_{xx} \cdots - 2F_z F_x F_{xz} + F_x^2 F_{zz}\right)$$

楕円面の臍点

$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, $z \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} (F_y^2 + F_z^2)F_{xx} + F_x^2 F_{zz} & F_x F_y (F_{zz} - F_{yy}) \\ F_x F_y (F_{zz} - F_{xx}) & (F_x^2 + F_z^2)F_x x + F_y^2 F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa} & 0 \\ 0 & \tilde{\kappa} \end{pmatrix}$$

- (1, 2)-成分，(2, 1)-成分が零 $\Leftrightarrow xy = 0.$
- $x = 0$ のとき (1, 1)-成分 $=$ (2, 2)-成分 $\Leftrightarrow$ $c^2(c^2 - a^2)y^2 + b^2(b^2 - a^2)z^2 = 0.$
- $y = 0$ のとき (1, 1)-成分 $=$ (2, 2)-成分 $\Leftrightarrow$ $c^2(b^2 - c^2)x^2 + a^2(b^2 - a^2)z^2 = 0.$

$0 < a < b < c$

$\Rightarrow$ $y = z = 0$ ×

?

楕円面の臍点（結論）

$0<a<b<c$ を満たす楕円面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ の臍点は 4 点：

$$
{}^t\!\left(\pm a\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}},\,0,\,\pm c\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}\right)
$$

$z=0$ のとき?

$x = g(y,z)$

$y = h(x,z)$