幾何学概論第二 (MTH.B212)

平均曲率・ガウス曲率の幾何学的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/05

問題 3-1

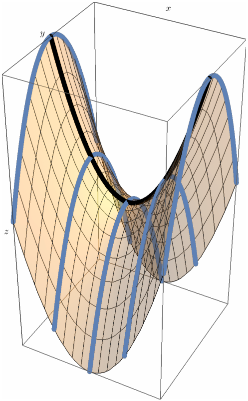
問題

0 を含む開区間で定義された二つの C^∞-級関数 φ, ψ に対して，xy-平面上の原点の近傍で定義された関数 $f(x,y) := \varphi(x) + \psi(y)$ のグラフ $p(x,y) := {}^t(x, y, f(x,y))$ は正則曲面を与える．この曲面の平均曲率が恒等的に零となる φ, ψ で $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．

（ヒント：xy-平面上の領域 U の各点 (x,y) で $\varphi(x) = \psi(y)$ が成り立つなら，この両辺は定数．）

移動曲面

- 関数 $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$ のグラフで表される曲面を移動曲面という．



$$z = x^2 - y^2$$

グラフ表示の平均曲率

$p(x,y) := {}^t(x,y,f(x,y))$

- $p_x = {}^t(1,0,f_x)$, $p_y = {}^t(0,1,f_y)$
- $\nu = \frac{1}{\delta}{}^t(-f_x,-f_y,1), \quad \delta = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$
- $p_{xx} = {}^t(0,0,f_{xx})$, $p_{xy} = {}^t(0,0,f_{xy})$, $p_{yy} = {}^t(0,0,f_{yy})$

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{II} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$A = \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} = \frac{1}{\delta^3}\begin{pmatrix} (1+f_y^2)f_{xx} - f_x f_y f_{xy} & * \\ * & (1+f_x^2)f_{yy} - f_x f_y f_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2\delta^3}\Big((1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}\Big)}$$

極小曲面

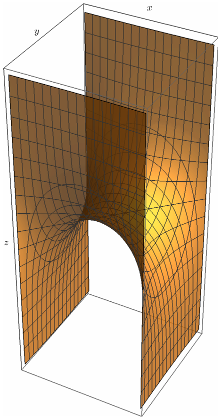
- 平均曲率が恒等的に零であるような曲面を極小曲面という.
- グラフ ${}^t(x, y, f(x, y))$ が極小曲面 $\Leftrightarrow$

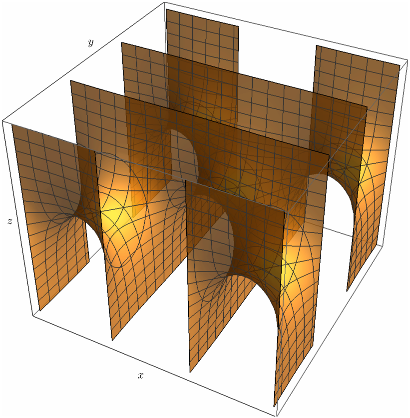
$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0$$

- 移動曲面 ${}^t(x, y, \varphi(x) + \psi(y))$ が極小曲面 $\Leftrightarrow$

$$(1 + \psi'^2)\varphi'' + (1 + \varphi'^2)\psi'' = 0$$

シャーク曲面





$$z = \log \frac{\cos x}{\cos y}$$

$$\cos y \cdot e^{z} = \cos x$$

陰関数定理

定理 (陰関数定理)

- $F\colon \mathbb{R}^3 \supset U \ni {}^t(x,y,z) \mapsto F(x,y,z) \in \mathbb{R}$: C^∞
- $F(\mathrm{P}) = 0,\ \ F_z(\mathrm{P}) \neq 0$ $(\mathrm{P} := {}^t(x_0,y_0,z_0) \in U)$

$\Rightarrow$

- $\exists\, V \subset U$：P の近傍；
- $\exists\, W \subset \mathbb{R}^2$：$(x_0,y_0)$ の近傍；
- $\exists f\colon W \to \mathbb{R}$：$C^\infty$

で次を満たす：

$$\{\mathrm{Q} \in V\,;\, F(\mathrm{Q}) = 0\} = \left\{{}^t\big(x,y,f(x,y)\big)\,;\, {}^t(x,y) \in W\right\}.$$

陰関数定理

定理 (陰関数定理)

- $F\colon \mathbb{R}^3 \supset U \ni {}^t(x,y,z) \mapsto F(x,y,z) \in \mathbb{R}$: C^∞
- $F(\mathrm{P}) = 0,\ \ F_z(\mathrm{P}) \neq 0$ $(\mathrm{P} := {}^t(x_0, y_0, z_0) \in U)$

$\Rightarrow \{{}^t(x,y,z)\,;\,F(x,y,z) = 0\}$ は点 P の十分近くで $z = f(x,y)$ とグラフ表示される.

系

- $F\colon \mathbb{R}^3 \supset U \ni {}^t(x,y,z) \mapsto F(x,y,z) \in \mathbb{R}$: C^∞
- $S := \{{}^t(x,y,z)\,;\,F(x,y,z) = 0\} \neq \emptyset$
- $dF = (F_x, F_y, F_z) \neq \mathbf{0}$ が S 上で成り立つ

$\Rightarrow S$ は「なめらかな曲面」

例：シャーク曲面

$\{{}^t(x, y, z)\,;\,\cos y \cdot e^z = \cos x\}$ は滑らかな曲面.

問題 3-2

問題

正の定数 a, b, c に対して，集合

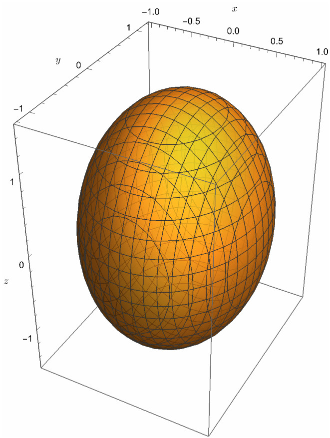
$$S := \left\{ {}^t(x, y, z)\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

は，次の意味でなめらかな曲面を与える：
任意の点 $\mathrm{P} \in S$ に対して，$\mathbb{R}^3$ における P の近傍 V と，$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された曲面の正則パラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が存在して，$p(U) = V \cap S$ が成り立つ．

とくに $0 < a < b < c$ のとき，S のガウス曲率 K，平均曲率 H が $H^2 - K = 0$ を満たすような S 上の点を求めなさい．

楕円面

$$F(x,y,z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$



臍点

臍点：ふたつの主曲率が一致する点.

補題

臍点 $\Leftrightarrow H^2 - K = 0 \Leftrightarrow A = \kappa I$

楕円面の臍点

$$S := \left\{{}^t(x,y,z)\,;\,F(x,y,z)=0\right\}, \qquad F(x,y,z) := \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

- $S' := S \cap \{z \neq 0\}$ 上の各点で $z = f(x,y)$ とグラフ表示する.

$$\begin{aligned} A &= \star \begin{pmatrix} (F_y^2+F_z^2)F_{xx}+F_x^2F_{zz} & F_xF_y(F_{zz}-F_{yy}) \\ F_xF_y(F_{zz}-F_{xx}) & (F_x^2+F_z^2)F_xx+F_y^2F_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \end{aligned}$$

楕円面の臍点

$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$; $z \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} (F_y^2 + F_z^2)F_{xx} + F_x^2 F_{zz} & F_x F_y (F_{zz} - F_{yy}) \\ F_x F_y (F_{zz} - F_{xx}) & (F_x^2 + F_z^2)F_x x + F_y^2 F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa} & 0 \\ 0 & \tilde{\kappa} \end{pmatrix}$$

- $(1,2)$-成分，$(2,1)$-成分が零 $\Leftrightarrow xy = 0$.
- $x = 0$ のとき $(1,1)$-成分 $= (2,2)$-成分 $\Leftrightarrow$ $c^2(c^2 - a^2)y^2 + b^2(b^2 - a^2)z^2 = 0$.
- $y = 0$ のとき $(1,1)$-成分 $= (2,2)$-成分 $\Leftrightarrow$ $c^2(b^2 - c^2)x^2 + a^2(b^2 - a^2)z^2 = 0$.

楕円面の臍点（結論）

$0 < a < b < c$ を満たす楕円面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ の臍点は 4 点：

$$ {}^t\left(\pm a\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}, 0, \pm c\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}} \right) $$