幾何学概論第二 (MTH.B212)

平均曲率・ガウス曲率の幾何学的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/05

第一基本量・第二基本量（復習）

- $U \subset \mathbb{R}^2$：uv 平面の領域
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$\nu$：単位法線ベクトル

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v)$$

$$= - \begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

主曲率・ガウス曲率・平均曲率（復習）

$p(u,v)$: 正則曲面

定義

ワインガルテン行列 $A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}$ の

- 固有値 κ_1, κ_2 を主曲率という.
- 主曲率の平均を平均曲率という：

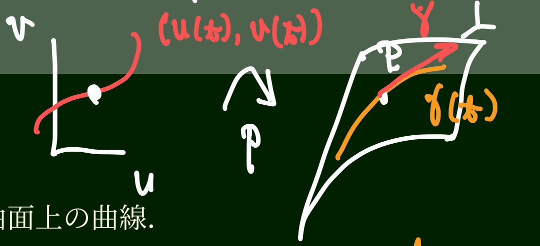
$$H := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A.$$

- 主曲率の積をガウス曲率という：

$$K := \kappa_1\kappa_2 = \det A = \frac{\det\ \widehat{II}}{\det\ \widehat{I}}.$$

Q: ワインガルテン行列の固有ベクトルの意味は？

曲面上の曲線



- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\bigl(u(t), v(t)\bigr)$：平面曲線
- $\gamma(t) := p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$：曲面上の曲線.

$$\dot\gamma(t) = \dot u(t) p_u\bigl(u(t), v(t)\bigr) + \dot v(t) p_v\bigl(u(t), v(t)\bigr)$$

chain-rule

$$|\dot\gamma|^2 = \dot u^2 (\underbrace{p_u\cdot p_u}_{E}) + 2\dot u\dot v(\underbrace{p_u\cdot p_v}_{F}) + \dot v^2 (\underbrace{p_v\cdot p_v}_{G})$$

補題

t が γ の弧長パラメータ $\Leftrightarrow$

速さ1

$$E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2 = 1$$

空間曲線

法曲率

normal curvature

- $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$：曲面上の曲線；$t$：弧長パラメータ
- $\gamma(0) = p(u_0, v_0) =: \mathrm{P}$.

定義

$\ddot{\gamma}(0)\cdot\nu(u_0, v_0)$ を γ の P における法曲率という．

normal curvature

命題

法曲率は曲線の速度ベクトルのみに依存し，加速度ベクトルには依存しない．

$p_{uu}\cdot\nu = L$

$\cdot\nu$

チェイン・ルールより $\boxed{\ddot{\gamma} = (\dot{u})^2 p_{uu} + 2\dot{u}\dot{v}p_{uv} + (\dot{v}^2)p_{vv} + \ddot{u}p_u + \ddot{v}p_v}$ となるが，p_u, p_v は ν と直交する．具体的には $\gamma\cdot\nu = \dot{u}^2 L + 2\dot{u}\dot{v}M + \dot{v}^2 N$.

$$\boxed{\gamma\cdot\nu = \dot{u}^2 L + 2\dot{u}\dot{v}M + \dot{v}^2 N}$$

法曲率

- $\mathrm{P} := p(u_0, v_0)$
- $\boldsymbol{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$; $|\boldsymbol{v}| = 1$

  $\Leftrightarrow \alpha^2 E + 2\alpha\beta F + \beta^2 G = 1$

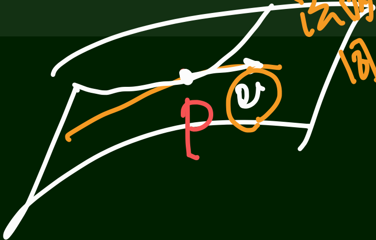
定義

曲面上の点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の法曲率 を

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) := \alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N$$

で定める.

接する2曲線の法曲率は同じ.



法曲率と主曲率

$F = \varphi - \lambda \psi \quad F_\alpha = F_\beta = F_\lambda = 0$

定理

曲面上の点 P における法曲率の最大値・最小値は主曲率である．

関数 $h(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta)\,\widehat{I\!I}\binom{\alpha}{\beta}$ の，条件 $g(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta)\,\widehat{I}\binom{\alpha}{\beta} = 1$ のもとでの最大・最小問題

$$\boxed{\widehat{I\!I}\binom{\alpha}{\beta} = \lambda\,\widehat{I}\binom{\alpha}{\beta}}$$

- 条件を満たす (α,β) の組全体は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合 $\Rightarrow$ 最大・最小値は存在する．

条件付極値

ψ

$E = E(u_0, v_0)$ etc

$\alpha^2 E + 2\alpha\beta F + \beta^2 G - 1 = 0$

の下で

$\alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N$ の最大，最小を求める．

φ

主方向

- κ_1, κ_2：主曲率 max. min
- $\kappa_n(\boldsymbol{v}_j) = \kappa_j$ を満たす $\boldsymbol{v}_j$ を<u>主方向</u>という．

臍点：ふたつの主曲率が一致する点 $\Leftrightarrow$ 法曲率が一定．

定理

臍点でない点で，主方向 $\boldsymbol{v}_j = \alpha_j p_u + \beta_j p_v$ に対応する平面ベクトル ${}^t(\alpha_j, \beta_j)$ は A の固有値 κ_j に関する固有ベクトル．

復習：グラフ表示

- $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$.
- 回転と平行移動で $\mathrm{P} = \mathrm{O}$, $\nu(\mathrm{P}) = {}^t(0,0,1)$ としてよい.

このとき，曲面は $(x, y, f(x,y))$ とグラフ表示できて，原点において

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{II} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

を満たす.

系 (復習)

ワインガルテン行列の固有値は実数である.

実対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交

主方向の直交性

定理

曲面上の点 P が臍点でないとき，二つの主方向は直交する．

系

点 P が臍点でないとするとき，回転と平行移動によって

- P = O (座標原点)
- $\nu(u_0, v_0) = {}^t(0,0,1)$
- ${}^t(1,0,0)$, ${}^t(0,1,0)$ はそれぞれ P における主曲率 κ_1, κ_2 に関する主方向

となるようにできる．とくに主方向は互いに直交する．

$$A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

Graph表示のチューンアップ

主曲率と曲面の形状

$A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} = \hat{\mathrm{II}}$

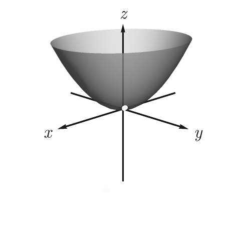
$= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ (κ_1, 0, 0, κ_2)

- $p(x, y) = (x, y, f(x, y))$：グラフ表示された曲面.
- $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.
- 原点における主方向は ${}^t(1, 0, 0)$, ${}^t(0, 1, 0)$.

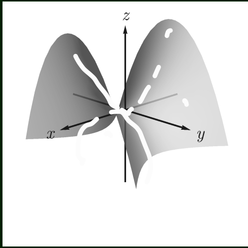
この状況で,

Taylorの定理

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + o(x^2 + y^2) \qquad ((x, y) \to (0, 0)).$$



$\kappa_1 > 0 \quad \kappa_2 > 0$



$\kappa_1 > 0 \quad \kappa_2 < 0$

$K < 0$

問題 4-1

問題

集合 $S := \{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0, z > 0\}$ は，問題 3-2 の意味でなめらかな曲面を与える．ただし a は正の定数．このとき，$S' := S \setminus \{(x, 0, z)\,;\, x < 0\}$ のパラメータ表示 $p(\xi, \eta)$ で，その第一基本形式が $d\xi^2 + d\eta^2$ となるものを与えなさい．

$K=0$

問題 4-2

問題

実数 $\overset{\theta}{\cancel{\alpha}}$ に対して

$$p_{\overset{\theta}{\cancel{\alpha}}}(u,v) := \begin{pmatrix} \cos\overset{\theta}{\cancel{\alpha}}\cos v\cosh u - \sin\overset{\theta}{\cancel{\alpha}}\sin v\sinh u \\ \cos\overset{\theta}{\cancel{\alpha}}\sin v\cosh u + \sin\overset{\theta}{\cancel{\alpha}}\cos v\sinh u \\ u\cos\overset{\theta}{\cancel{\alpha}} - v\sin\overset{\theta}{\cancel{\alpha}} \end{pmatrix}$$

とおく．このとき p_α の主曲率関数 $\kappa_1(u,v)$, $\kappa_2(u,v)$ $(\kappa_1 \geqq \kappa_2)$, および，$\kappa_j$ $(j=1,2)$ に対する主方向 $\boldsymbol{v}_j(u,v) = \alpha_j(u,v)p_u(u,v) + \beta_j(u,v)p_v(u,v)$ を与える関数 $\alpha_j(u,v)$, $\beta_j(u,v)$ $(j=1,2)$ を求めなさい．

本日の課題の提出締切は

2023年1月16日（月曜日）07:00 JST