幾何学概論第二 (MTH.B212)

平均曲率・ガウス曲率の幾何学的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/05

設定

- U: uv-平面の領域；V: $\xi\eta$-平面の領域
- $\varphi\colon V \to U$：微分同相（パラメータ変換）
- P：ヤコビ行列
$$P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$\nu$：単位法線ベクトル
- $\tilde{p} := p \circ \varphi$；$\tilde{\nu} := \nu \circ \varphi$.
- $\check{p} := Rp + \boldsymbol{a}$, $\check{\nu} := R\nu$ $(R \in \mathrm{O}(3), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$

第一基本量・第二基本量（復習）

$$
\begin{aligned}
\widehat{I} &:= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \\
\widehat{II} &:= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) \\
&= -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

主曲率・ガウス曲率・平均曲率（復習）

$p(u,v)$: 正則曲面

定義

ワインガルテン行列 $A := \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{II}$ の

- 固有値 κ_1, κ_2 を主曲率という.
- 主曲率の平均を平均曲率という：

$$H := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A.$$

- 主曲率の積をガウス曲率という：

$$K := \kappa_1\kappa_2 = \det A = \frac{\det\,\widehat{II}}{\det\,\widehat{I}}.$$

Q: ワインガルテン行列の固有ベクトルの意味は？

法曲率

曲面上の曲線 $\gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ が $t = 0$ で $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ を通るとする．とくに t が γ の弧長パラメータとすると，

法曲率

曲面上の曲線 $\gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ が $t = 0$ で $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ を通るとする．とくに t が γ の弧長パラメータとすると，
$1 = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right|^2 = |\dot{u}p_u + \dot{v}p_v|^2 = \dot{u}^2E + 2\dot{u}\dot{v}F + \dot{v}^2G$ が成り立っている．このとき $\ddot{\gamma}(0) \cdot \nu(u_0, v_0)$ を γ の P における法曲率という：

命題

法曲率は曲線の速度ベクトルのみに依存し，加速度ベクトルには依存しない．

証明.

チェイン・ルールより
$\ddot{\gamma} = (\dot{u})^2 p_{uu} + 2\dot{u}\dot{v}p_{uv} + (\dot{v}^2)p_{vv} + \ddot{u}p_u + \ddot{v}p_v$ となるが，p_u, p_v は ν と直交する．具体的には $\ddot{\gamma} \cdot \nu = \dot{u}^2L + 2\dot{u}\dot{v}M + \dot{v}^2N$. □

そこで $\boldsymbol{v} := \dot{\gamma}(0) = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$，（$|\boldsymbol{v}| = 1$）となる曲線 γ の P における法曲率を「点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の法曲率」とよび

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) := \alpha^2L + 2\alpha\beta M + \beta^2N, \qquad \bigl(|\boldsymbol{v}|^2 = \alpha^2E + 2\alpha\beta F + \beta^2G = 1\bigr)$$

問題 4-1

問題

集合 $S := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2-a^2z^2=0, z>0\}$ は，問題 3-2 の意味でなめらかな曲面を与える．ただし a は正の定数．このとき，$S' := S \setminus \{(x,0,z)\, x<0\}$ のパラメータ表示 $p(\xi,\eta)$ で，その第一基本形式が $d\xi^2+d\eta^2$ となるものを与えなさい．

問題 4-2

問題

実数 α に対して

$$p_\alpha(u,v) := \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos v\cosh u - \sin\alpha\sin v\sinh u \\ \cos\alpha\sin v\cosh u + \sin\alpha\cos v\sinh u \\ u\cos\alpha - v\sin\alpha \end{pmatrix}$$

とおく．このとき p_α の主曲率関数 $\kappa_1(u,v)$, $\kappa_2(u,v)$ $(\kappa_1 \geqq \kappa_2)$, および，$\kappa_j$ $(j=1,2)$ に対する主方向 $\boldsymbol{v}_j(u,v) = \alpha_j(u,v)p_u(u,v) + \beta_j(u,v)p_v(u,v)$ を与える関数 $\alpha_j(u,v)$, $\beta_j(u,v)$ $(j=1,2)$ を求めなさい．