2023 年 1 月 5 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 4

■お知らせ

- あけましておめでとうございます．
- 26 名の方から課題の提出がありました．T2SCHOLA よりフィードバックしています．
- 来週の木曜日（1 月 12 日）は月曜日の時間割なので，次回の講義は 1 月 19 日となります．
- 今回の課題提出の締め切りは都合により **1 月 16 日（月）07:00** とします．
- 学生調査 2022 年追加調査にご協力ください．回答期限 1 月 27 日．教務 web システムより回答できます．
- 学修アンケートにご協力ください．T2SCHOLA より回答できます．

■前回の補足

- ワインガルテン行列の固有値（主曲率）に対応する固有ベクトルは何なのか，というご質問が複数．今回扱う主方向です．
- ガウス曲率・平均曲率から曲面は決まるか，というご質問が複数あります．決まりません．本日の問題 4-2 を参照のこと．
- フルネ枠に対応して「ガウス・ワインガルテン方程式」を書き下した方がいらっしゃいました．第 6 回あたりで扱います．

■前回までの訂正

- 20221222 黒板 C の 7 ページ目：${}^t(\tilde p_\xi, \tilde p_\eta) = (p_\xi, p_\eta)P \Rightarrow {}^t(\tilde p_\xi, \tilde p_\eta) = (p_u, p_v)P$

■授業に関する御意見

- 体調を崩し，1 回授業に参加できなかっただけで，資料を見ても全くわからなくなってきました．授業に参加する重要性を感じました．
  山田のコメント： なるほど．ライブの感覚とは少し違いますが，録画も公開していますのでご利用ください．
- 今回の課題にヒントをもらわなければほぼ不可能な問題（問題 3-2）を出題されたのは，誰かさんが講義まえに解いてくるのを見越してのことですか...?
  山田のコメント： それって誰？
- 授業を聞いていると曲線論や曲面論はうまくいきすぎている気がします．例えば，A が対角化可能であることの証明で，線形代数と微分積分がお膳立てしているみたいです．
  山田のコメント： うまく使っているだけですが，そう見えますよね．
- 1 年の頃はこんなの求めて何になるんだくらいだった det や tr が曲面の曲がり具合を表す量でもあるとは面白いです．
  山田のコメント： これからそういう場面をさまざまな場所で眺めるでしょう．
- ないです．　**山田のコメント：** me, too

■質問と回答

質問 1： $K = H = 0$ なら平面の一部になる気がするが，$K = 0$ で $H \neq 0$，$K \neq 0$，$H = 0$ の場合はどのような曲面になるのか？　**お答え：** 前半：正しい．後半：いろいろある．例 3.9.

質問 2： 2 つの実数が与えられた場合，それを主曲率としてもつ曲面がどのような形（平面や球面など）をしているかを知ることはできますか．　**お答え：** 主曲率だけでは曲面は決まりません．

質問 3： 今までの曲率は各点に対し一つだけでしたが，今回はなぜ 2 つなのでしょうか．

お答え： 次元が上がった分，情報量が必要．

質問 4： 平均曲率を $\frac{1}{2}\operatorname{tr} A$ でなく $\operatorname{tr} A$ と定義するということもあるとおっしゃっていましたが，これも平均といってよいのでしょうか．　**お答え：** 習慣的には平均といっています．「平均収束」はどうですか？

質問 5： ガウス曲率が曲面の形状にどう関係しているのかは今日の講義の図解で分かったのですが，平均曲率がどう関係しているのですか．臍点の特徴づけに用いられてはいますが，単体で考えた場合何か意味するところがあるのか教えていただきたいです．　**お答え：** たとえば $\overline{D}$ がコンパクトになるような領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で p と $p + t\nu$ の面積をそれぞれ $\mathcal{A}_0$, A_t と書くことにすると，$\frac{dA_t}{dt}(0) = -2\int_D H\,dA$ $(dA = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv)$.

質問 6： 正則曲面 $p(u, v)$ の主曲率とは，それぞれ一方の変数を固定したときに得られる曲線の各点における曲率になりますか．　**お答え：** いいえ．それではパラメータ変換をすると主曲率が変わってしまいます．ご質問のような性質をもつパラメータをとることは（臍点の近傍でなければ）できます（曲率線座標）．

質問 7： 正則曲面 $p(u, v)$ について，u 曲線，v 曲線の曲率と主曲率には何か関係がありますか？ 主曲率を用いて u 曲線，v 曲線の曲率を表すことはできますか?　**お答え：** はい（今回扱う）．

質問 8： 曲面上のある点での主曲率が求まれば，曲線のときの曲率円のように曲面を最もよく近似する球を主曲率を用いて表せますか． **お答え：**そのような球面は存在するのだろうか？ 系 4.6 参照

質問 9： 曲面の 1 点で接する球の半径はどのように求めるのでしょうか．フレネの公式の相当するものがないので曲率円のようにはいかなないと思うのですが． **お答え：**曲面上の与えられた点で任意の半径の球面が接します．

質問 10： 講義中に一般次元でも平均曲率を考えることができるとおっしゃっていましたが，たとえば 4 次元空間内の曲面に拡張する場合主曲率が (重複含めて) 3 つ出てきます．そのとき，固有値の和あるいは相加平均 (平均曲率) と積 (ガウス曲率) のみを考えるのか，それとも $xy + yz + zx$ (x, y, z は固有値) のような形の不変量を新たに考えていくのか，どちらが一般的ですか．また後者の場合、新たに加わる不変量はいったい何を意味するのでしょうか．上の状況で，固有値の積を考えるだけでは次元が上がるほど固有値の符号の組み合わせが多数考えられ，曲面の形状がわからない (たとえば固有値が 3 つで積が正の場合、すべて正の場合と一つだけ正の場合が考えられ，形状が決まらない) と思うのですが、小行列式を考えたりするのでしょうか．

お答え： 前半：なんとも言えませんが，$I\!I$ をそのまま見るのが簡単かと思います．後半：二次形式 $I\!I$ の「符号」を見る．

質問 11： 第一・第二基本形式は $\mathbb{R}^d$ $(d > 3)$ でも考えられますか．逆に $\mathbb{R}^2$ でも考えられますか．

お答え： $\mathbb{R}^d$ $(d \geqq 2)$ の超曲面に対して全く同様に定義できる．特に $d = 2$ の場合，平面曲線 $\gamma(t)$ に対して $ds^2 = |\dot\gamma(t)|^2\,dt^2$，$I\!I = \kappa(t)|\dot\gamma(t)|^2\,dt^2$（ここで単位法線ベクトルは進行方向に対して左向き，κ は曲率関数）となる．

質問 12： n 次元で $n-1$ 次元的な集合 (2 次元での曲線，3 次元での曲面に対応するものが) で考えても $\widehat{I}$，$\widehat{I\!I}$ や各種曲率も上手に定義できそうですが，定義出来ないものってあったりしますか？ **お答え：**「超曲面」という単語は紹介しましたよね．定義できます．定義出来ないものは「もの」の範囲が何かによりますね．

質問 13： 第 2 基本形式とは違い第 3 基本形式は符号に任意性がないので，第 3 基本形式を用いて平均曲率や Gauss 曲率を表すことができればよりキレイな理論が得られるのではと思ったのですが，そのようなことは可能ですか．

お答え： 第三基本形式 $I\!I\!I = d\nu \cdot d\nu$ を考えると，ガウス曲率 K は $K^2 = \det \widehat{I\!I\!I} \,/\, \widehat{I}$ を満たすが，符号が決められない．

質問 14： 平均曲率とガウス曲率は行列の固有値を用いて定義されていますが，こういった概念が生まれた頃にはすでに線型代数学は十分に発展していたということですか． **お答え：**いまの形にまで整理はされていないようですが，二次形式の理論はかなり進んでいた模様．平均曲率・ガウス曲率の定義はこの講義のものと違っている可能性がある．

質問 15： 上の（山田注：問題 3-2）が合っていれば臍点の座標は楕円面の a, b, c の最大のものと最小のものに対応する平面上（今回なら xz 平面）に存在していますが，不思議です．なぜ a, b, c の大小関係で臍点の座標の表し方が変わるのでしょうか． **お答え：**「a, b, c の最大のものと最小のものに対応する平面上」が幾何学的な表現ですね．あえて言い換えると「最長の軸と最短の軸を含む平面と楕円面の共通部分には臍点はない」．どれを x 軸上に取るかは問題ではありません．むしろ a, b, c を用いた表示がその大小関係に関わらず同じという方が不自然と思います．

質問 16： 固有値の和と積がそれぞれ tr, det になることが初耳だったので和の方を考えてみました（以下略）

お答え： 初耳だったとしたらいますぐ覚えてください．一般に正方行列は三角化可能であることからも示せますね．

質問 17： 講義資料の定理 3.4 で証明に A でなく B を用いているのはなぜでしょうか．

お答え： この B が $-A$ に一致することを示したいという方針だから．

質問 18： p の定義域は領域とすることが多いですが，今回の問題のように半開区間の直積 $[0, \pi) \times [0, 2\pi)$ とる方が自然な時もあると思います．（山田注：楕円面のパラメータ表示のことを言っている）この場合，領域じゃなくても良いのでしょうか． **お答え：**境界点での微分可能性，正則性の議論さえきちんと押さえておけばよいです．

質問 19： 問題 3-2 で S は次の意味で滑らかな曲面を与えるとありますが，ここでの意味は S が正則部分多様体となるということですか．

お答え： $\mathbb{R}^3$ の 2 次元（正則）部分多様体になる，ということです．

質問 20： 陰関数定理により，様々な曲面をグラフ表示できますが，解析的に解けない関数 $f(x, y)$ を含む曲面 ${}^t(x, y, f(x, y))$ が，別のパラメータ表示によって解析的に表せる例はありますか?

お答え： 解析的に解ける，解析的に表せる，という語をどういう意味で使っていますか．

質問 21： 成積評価（原文ママ：成績のことか）を見返していたのですが，「$Z = 5 \times [\frac{z}{5}]$ で与えられる Z と 100 のうち大きくない方を評価点とする」とありますが，Z が 100 を超えることはありえますか．ないような気がしますが．

お答え： たしかに．以前，定期試験の満点を 100 より大きくしたとき，扱いを明記していなかったので，その対応でした．

質問 22： ワインガルテン行列の固有値が実数というのと，A が対称行列であることの結びつきが分かりません．

お答え： 定理：実対称行列の固有値は実数（線形代数学第二で学んだはず）．

質問 23： 補題 3.7 の応用例が知りたいです． **お答え：**系 3.8

4　平均曲率・ガウス曲率の幾何学的性質

ここでは断りのない限り $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級正則曲面，ν を p の単位法ベクトル場とする．さらに $(u_0, v_0) \in U$ を一つ固定し，$\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ としておく．

■ガウス曲率・平均曲率・主曲率（復習） 正則曲面 p の第一・第二基本行列は次のように定義された：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}, \quad \widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

第一基本行列 $\widehat{I}$ の固有値は正，とくに $\det \widehat{I} > 0$ なので，次のように**ワインガルテン行列** A が定義される：

$$A := \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{II} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

事実 4.1.
- ワインガルテン行列 A の固有値 κ_1, κ_2 は実数である（主曲率）.
- A の固有値は曲面のパラメータのとり方によらない.
- ワインガルテンの公式 $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$.

定義 4.2. ワインガルテン行列 A の固有値の積 K を**ガウス曲率**，固有値の平均 H を**平均曲率**という：$K := \det A = \det \widehat{II} \,/ \det \widehat{I}$, $H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$.

■法曲率と主曲率　曲面上の曲線 $\gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ が $t = 0$ で $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ を通るとする．とくに t が γ の弧長パラメータとすると，$1 = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right|^2 = |\dot{u}p_u + \dot{v}p_v|^2 = \dot{u}^2E + 2\dot{u}\dot{v}F + \dot{v}^2G$ が成り立っている．このとき $\ddot{\gamma}(0) \cdot \nu(u_0, v_0)$ を γ の P における**法曲率**という：

命題 4.3. 法曲率は曲線の速度ベクトルのみに依存し，加速度ベクトルには依存しない.

> **証明：** チェイン・ルールより $\ddot{\gamma} = (\dot{u})^2 p_{uu} + 2\dot{u}\dot{v}p_{uv} + (\dot{v}^2)p_{vv} + \ddot{u}p_u + \ddot{v}p_v$ となるが，p_u, p_v は ν と直交する．具体的には $\ddot{\gamma} \cdot \nu = \dot{u}^2L + 2\dot{u}\dot{v}M + \dot{v}^2N$.

そこで $\boldsymbol{v} := \dot{\gamma}(0) = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$,（$|\boldsymbol{v}| = 1$）となる曲線 γ の P における法曲率を「点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の法曲率」とよび

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) := \alpha^2L + 2\alpha\beta M + \beta^2N, \qquad \bigl(|\boldsymbol{v}|^2 = \alpha^2E + 2\alpha\beta F + \beta^2G = 1\bigr)$$

と書く．ただし E, F, G, L, M, N は (u_0, v_0) における値.

定理 4.4. 曲面上の点 P における法曲率の最大値・最小値は主曲率である.

> **証明：** 関数 $h(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\,\widehat{II}\binom{\alpha}{\beta}$ の，条件 $g(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\,\widehat{I}\binom{\alpha}{\beta} = 1$ のもとでの最大・最小問題である．条件を満たす (α, β) の組全体は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合だから，最大・最小値の存在は保証されるので，あとはラグランジュの未定係数法を用いればよい.

二つの主曲率が一致する点を**臍点**（せいてん, umbilic point）という．臍点でない点における主曲率 κ_1, κ_2 に対して，$\kappa(\boldsymbol{v}_j) = \kappa_j$ $(j = 1, 2)$ となる $\boldsymbol{v}_j$ を**主方向**という．主方向を $\boldsymbol{v}_j = \alpha_j p_u + \beta_j p_v$ とおくと，${}^t(\alpha_j, \beta_j)$ はワインガルテン行列 A の固有値 κ_j に関する固有ベクトルである.

2023 年 1 月 5 日

定理 4.5. 曲面上の点 P が臍点でないとき，二つの主方向は直交する．

証明： 補題 3.7 のようなグラフ表示 $p(x,y) = {}^t(x, y, f(x, y))$ ($f_x(0,0) = 0$，$f_y(0,0) = 0$) の原点において確かめればよい．ワインガルテン行列 $A(0,0)$ は f の原点におけるヘッセ行列だからとくに対称行列．したがって，二つの異なる固有値（主曲率）に対応する固有ベクトル ${}^t(\alpha_1, \beta_1)$，${}^t(\alpha_2, \beta_2)$ は直交するので，対応する主方向 $\boldsymbol{v}_j = \alpha_j p_x(0,0) + \beta_j p_y(0,0) = {}^t(\alpha_j, \beta_j, 0)$ は互いに直交する．

系 4.6. 点 P が臍点でないとするとき，(1) $\mathrm{P} = \mathrm{O}$ (座標原点)，(2) $\nu(u_0, v_0) = {}^t(0,0,1)$，(3) ${}^t(1,0,0)$，${}^t(0,1,0)$ はそれぞれ P における主曲率 κ_1, κ_2 に関する主方向，となるようにできる．

この状況で，曲面を $\tilde{p}(x,y) = {}^t(x, y, f(x,y))$ とグラフ表示すると，次が成り立つ：

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + o(x^2 + y^2) \qquad ((x,y) \to (0,0)).$$

■漸近方向　$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ となる接ベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向を**漸近方向**という．$K(\mathrm{P}) > 0$ となる点 P では漸近方向は存在しない．また $K(\mathrm{P}) < 0$ なら二つの漸近方向が存在する．

補題 4.7. $\boldsymbol{v} = \alpha p_u + \beta p_v$ が漸近方向を与えるための必要十分条件は $\alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N = 0$.

例 4.8.
- 点 P でガウス曲率が正ならば，P の十分近くで曲面の像は P における曲面の接平面 Π_{P} の一方の側にある．
- 点 P でガウス曲率が負ならば，Π_{P} と曲面の像の共通部分は，P の十分近くでは Π_{P} 上の P で交わる 2 本の曲線で，それらの P における接線の方向は漸近方向である．

問題

4-1 集合 $S := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0, z > 0\}$ は，問題 3-2 の意味でなめらかな曲面を与える．ただし a は正の定数．このとき，$S' := S \setminus \{{}^t(x,0,z)\,;\, x < 0\}$ のパラメータ表示 $p(\xi, \eta)$ で，その第一基本形式が $d\xi^2 + d\eta^2$ となるものを与えなさい．

4-2 実数 θ に対して

$$p_\theta(u,v) := \begin{pmatrix} \cos\theta \cos v \cosh u - \sin\theta \sin v \sinh u \\ \cos\theta \sin v \cosh u + \sin\theta \cos v \sinh u \\ u\cos\theta - v \sin\theta \end{pmatrix}$$

とおく．このとき p_θ の主曲率関数 $\kappa_1(u,v)$, $\kappa_2(u,v)$ ($\kappa_1 \geqq \kappa_2$)，および，κ_j ($j = 1,2$) に対する主方向 $\boldsymbol{v}_j(u,v) = \alpha_j(u,v) p_u(u,v) + \beta_j(u,v) p_v(u,v)$ を与える関数 $\alpha_j(u,v)$, $\beta_j(u,v)$ ($j = 1,2$) を求めなさい．