幾何学概論第二 (MTH.B212)

曲面論の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/19

問題 4-1

問題

集合 $S := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \boxed{x^2+y^2-a^2z^2=0}, z>0\}$ は，問題 3-2 の意味でなめらかな曲面を与える．ただし a は正の定数．このとき，$S' := S \setminus \{(x,0,z)\,;\, x<0\}$ のパラメータ表示 $p(\xi,\eta)$ で，その第一基本形式が $\boxed{d\xi^2+d\eta^2}$ となるものを与えなさい．

$K=0$ （恒等的に零）

・各点の近傍で $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ となるパラメータ (ξ, η) が存在する

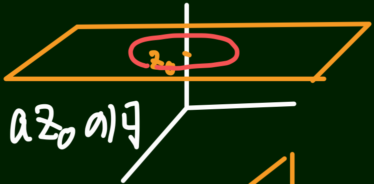
問題 4-1

$S := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2+y^2-a^2z^2 = 0, \underline{z>0}\} \qquad (a>0)$

- 平面 $z = z_0$ $(z_0 > 0)$ との共通部分

$x^2+y^2 = a^2z_0^2$

原点中心 半径 az_0 の円

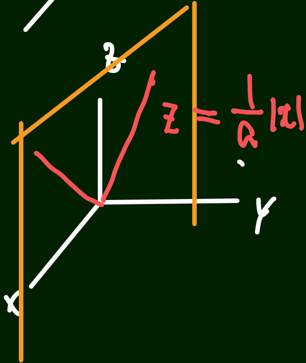


z軸に関する回転面

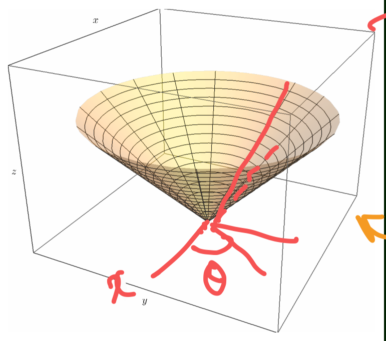
- 平面 $y = 0$ との共通部分

$x^2 = a^2z^2$

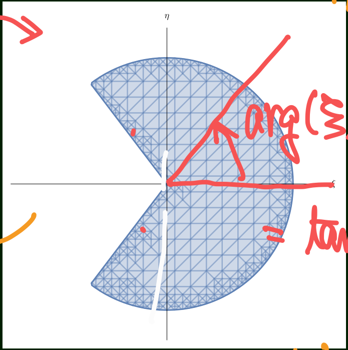
$|x| = az$



長さを保った平面展開



円錐面



平面への展開

$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$

$$\tilde{p}(\xi,\eta) = {}^t\!\left(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ \frac{1}{a}r\right) \quad \left(-\frac{\pi}{\lambda} < \arg(\xi,\eta) < \frac{\pi}{\lambda}\right),$$

$$r = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\xi^2+\eta^2}, \quad \theta = \lambda\arg(\xi,\eta), \quad \boxed{\lambda = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}}.$$

- 回転面のパラメータ表示：$p(r,\theta) = {}^t\left(r\cos\theta, r\sin\theta, \dfrac{r}{a}\right)$.

$$\boxed{ds^2 = \lambda^2\,dr^2 + r^2\,d\theta^2.}$$

$\lambda = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ const

- パラメータ変換 $(\xi,\eta) = (\xi(r,\theta), \eta(r,\theta))$

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\xi^2 + d\eta^2 \\ &= (\xi_r\,dr + \xi_\theta\,d\theta)^2 + (\eta_r\,dr + \eta_\theta\,d\theta)^2 \\ &= \underbrace{(\xi_r^2 + \eta_r^2)}_{\lambda^2} dr^2 + 2\underbrace{(\xi_r\xi_\theta + \eta_r\eta_\theta)}_{0}\,dr\,d\theta + \underbrace{(\xi_\theta^2 + \eta_\theta^2)}_{r^2}\,d\theta^2 \end{aligned}$$

解くべき方程式：

$$\begin{cases} \xi_r^2 + \eta_r^2 &= \lambda^2 \\ \xi_r\xi_\theta + \eta_r\eta_\theta &= 0 \\ \xi_\theta^2 + \eta_\theta^2 &= r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_r^2 + \eta_r^2 &= \lambda^2 \\ \xi_r\xi_\theta + \eta_r\eta_\theta &= 0 \\ \xi_\theta^2 + \eta_\theta^2 &= r^2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} \xi_r = \lambda\cos\varphi, & \xi_\theta = -r\sin\varphi, \\ \eta_r = \lambda\sin\varphi, & \eta_\theta = r\cos\varphi. \end{matrix}$$

const ⊥

$$\boxed{\begin{matrix} 0 = \xi_{r\theta} - \xi_{\theta r} \\ 0 = \eta_{r\theta} - \eta_{\theta r} \end{matrix}} \begin{matrix} = -\lambda\sin\varphi\cdot\varphi_\theta + \sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi_r \\ = \cdots \end{matrix}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_r = 0 \qquad \varphi_\theta = \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\theta}{\lambda}} \qquad \xi_r = \lambda\cos\frac{\theta}{\lambda} \quad \cdots$$

$$\begin{cases} \xi = \lambda r \cos\frac{\theta}{\lambda} \\ \eta = \lambda r \sin\frac{\theta}{\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \theta = \lambda \arg(\xi, \eta) \end{cases}$$

問題 4-2

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_2 = \cdots$$

問題

実数 α に対して

$$p_\alpha(u,v) := \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos v\cosh u - \sin\alpha\sin v\sinh u \\ \cos\alpha\sin v\cosh u + \sin\alpha\cos v\sinh u \\ u\cos\alpha - v\sin\alpha \end{pmatrix}$$

とおく．このとき p_α の主曲率関数 $\kappa_1(u,v)$, $\kappa_2(u,v)$ $(\kappa_1 \geqq \kappa_2)$, および, κ_j $(j=1,2)$ に対する主方向 $\boldsymbol{v}_j(u,v) = \alpha_j(u,v)p_u(u,v) + \beta_j(u,v)p_v(u,v)$ を与える関数 $\alpha_j(u,v)$, $\beta_j(u,v)$ $(j=1,2)$ を求めなさい．

問題 4-2

$$p_\theta(u,v) := \begin{pmatrix} \cos\theta\cos v\cosh u - \sin\theta\sin v\sinh u \\ \cos\theta\sin v\cosh u + \sin\theta\cos v\sinh u \\ u\cos\theta - v\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\widehat{I} = \cosh^2 u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{II} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$A = \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} = \operatorname{sech}^2 u \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\kappa_1 = \operatorname{sech}^2 u, \qquad \kappa_2 = -\operatorname{sech}^2 u,$$

$$H = 0, \qquad K = -\operatorname{sech}^4 u$$

主方向が $\alpha P_u + \beta P_v \iff \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ がAの固有ベクトル

対称

$$A = \mathrm{sech}^2 u \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

~1

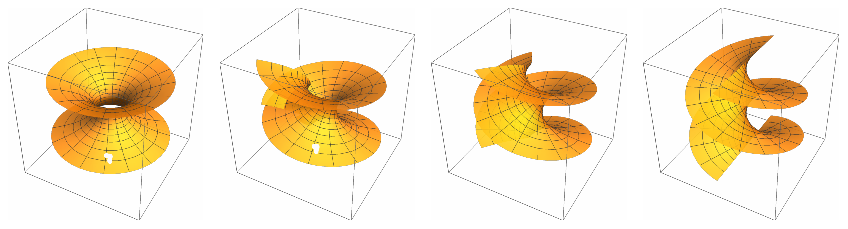
$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$\hat{A} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の固有ベクトル

<u>固有値 1</u>

$$\hat{A} - I = \begin{pmatrix} -\cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ 〃 & -\sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} ,$$



$\theta = 0$
catenoid

$\theta = \frac{\pi}{2}$
helicoid

常らせん面

θによらない（きょりを保つ）

$$ds^2 = \cosh^2 u (du^2 + dv^2)$$

$$II = -\cos\theta\, du^2 + 2\sin\theta\, du\, dv + \cos\theta\, dv^2$$

$$H = 0, \qquad K = -\operatorname{sech}^4 u$$

θによらない

KとHは曲面を定めない。