

幾何学概論第二 (MTH.B212)

曲面論の基本定理

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/>

東京工業大学理学院数学系

2023/01/19

問題 4-1

問題

集合 $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0, z > 0\}$ は、問題 3-2 の意味でなめらかな曲面を与える。ただし a は正の定数。

このとき、 $S' := S \setminus \{(x, 0, z); x < 0\}$ のパラメータ表示 $p(\xi, \eta)$ で、その第一基本形式が $d\xi^2 + d\eta^2$ となるものを与えなさい。

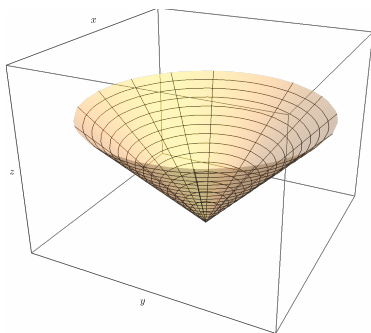
問題 4-1

$$S := \{^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0, z > 0\} \quad (a > 0)$$

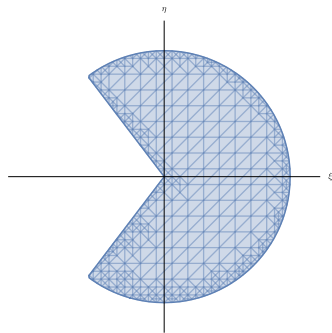
▶ 平面 $z = z_0$ ($z_0 > 0$) との共通部分

▶ 平面 $y = 0$ との共通部分

問題 4-1



円錐面



平面への展開

$$\tilde{p}(\xi, \eta) = {}^t \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{1}{a} r \right) \quad \left(-\frac{\pi}{\lambda} < \arg(\xi, \eta) < \frac{\pi}{\lambda} \right),$$
$$r = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \theta = \lambda \arg(\xi, \eta), \quad \lambda = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

問題 4-1

- ▶ 回転面のパラメータ表示： $p(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{r}{a} \right)$

$$ds^2 = \lambda^2 dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

- ▶ パラメータ変換 $(\xi, \eta) = (\xi(r, \theta), \eta(r, \theta))$

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\xi^2 + d\eta^2 \\ &= (\xi_r dr + \xi_\theta d\theta)^2 + (\eta_r dr + \eta_\theta d\theta)^2 \\ &= (\xi_r^2 + \eta_r^2) dr^2 + 2(\xi_r \xi_\theta + \eta_r \eta_\theta) dr d\theta + (\xi_\theta^2 + \eta_\theta^2) d\theta^2 \end{aligned}$$

解くべき方程式：

$$\begin{cases} \xi_r^2 + \eta_r^2 &= \lambda^2 \\ \xi_r \xi_\theta + \eta_r \eta_\theta &= 0 \\ \xi_\theta^2 + \eta_\theta^2 &= r^2 \end{cases}$$

問題 4-1

$$\begin{cases} \xi_r^2 + \eta_r^2 & = \lambda^2 \\ \xi_r \xi_\theta + \eta_r \eta_\theta & = 0 \\ \xi_\theta^2 + \eta_\theta^2 & = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} \xi_r = \lambda \cos \varphi, & \xi_\theta = -r \sin \varphi, \\ \eta_r = \lambda \sin \varphi, & \eta_\theta = r \cos \varphi. \end{array}$$

問題 4-2

問題

実数 α に対して

$$p_\alpha(u, v) := \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos v \cosh u - \sin \alpha \sin v \sinh u \\ \cos \alpha \sin v \cosh u + \sin \alpha \cos v \sinh u \\ u \cos \alpha - v \sin \alpha \end{pmatrix}$$

とおく. このとき p_α の主曲率関数 $\kappa_1(u, v)$, $\kappa_2(u, v)$ ($\kappa_1 \geq \kappa_2$), および, κ_j ($j = 1, 2$) に対する主方向

$\mathbf{v}_j(u, v) = \alpha_j(u, v)p_u(u, v) + \beta_j(u, v)p_v(u, v)$ を与える関数 $\alpha_j(u, v)$, $\beta_j(u, v)$ ($j = 1, 2$) を求めなさい.

問題 4-2

$$p_{\theta}(u, v) := \begin{pmatrix} \cos \theta \cos v \cosh u - \sin \theta \sin v \sinh u \\ \cos \theta \sin v \cosh u + \sin \theta \cos v \sinh u \\ u \cos \theta - v \sin \theta \end{pmatrix}$$

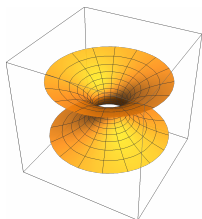
$$\widehat{I} = \cosh^2 u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{II} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A = \widehat{I}^{-1} \widehat{II} = \operatorname{sech}^2 u \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

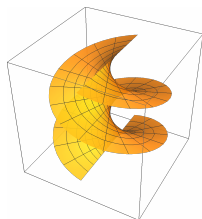
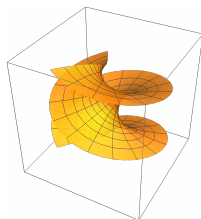
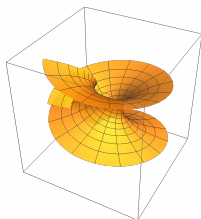
$$\kappa_1 = \operatorname{sech}^2 u, \quad \kappa_2 = -\operatorname{sech}^2 u,$$

$$H = 0, \quad K = -\operatorname{sech}^4 u$$

問題 4-2



$\theta = 0$
catenoid



$\theta = \frac{\pi}{2}$
helicoid

$$ds^2 = \cosh^2 u (du^2 + dv^2)$$

$$II = -\cos \theta du^2 + 2 \sin \theta du dv + \cos \theta dv^2$$

$$H = 0, \quad K = -\operatorname{sech}^4 u$$