幾何学概論第二 (MTH.B212)

曲面論の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/19

単位球面

$\begin{pmatrix} \det > 0 \\ \mathrm{tr} > 0 \end{pmatrix}$ $\quad \nu \colon U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$

- $U \subset \mathbb{R}^2$：uv 平面の領域
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$\nu$：単位法線ベクトル

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

部分積分

$$\int x'y = (xy) - \int xy'$$

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v)$$

$$= -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

(習慣)

$$p_u \cdot \nu_v \underset{\text{部分}}{=} (p_u \cdot \nu)_v - p_{uv} \cdot \nu$$

主曲率・ガウス曲率・平均曲率（復習）

$p(u,v)$: 正則曲面

定義

ワインガルテン行列 $A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}$ の

- 固有値 κ_1, κ_2 を<u>主曲率</u>という．
- 主曲率の平均を<u>平均曲率</u>という：

$$H := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A.$$

- 主曲率の積を<u>ガウス曲率</u>という：

$$K := \kappa_1\kappa_2 = \det A = \frac{\det\ \widehat{II}}{\det\ \widehat{I}}.$$

ワインガルテンの公式

定理 (ワインガルテンの公式，定理 3.4)

$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$，すなわち

$$\nu_u = -A_1^1 p_u - A_1^2 p_v$$
$$\nu_v = -A_2^1 p_u - A_2^2 p_v$$

対称行列は
実係

事実 A: 対角化可能.

すべての点が臍点ならば，球面または平面の一部

主曲率が重根

κ

$A = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

すべての点が臍点 $\Rightarrow$ $A = \kappa I$ $\quad \kappa$: 主曲率.

Weingarten: $\quad \kappa = \kappa(u, v)$

$$\nu_u = -\kappa p_u \qquad \nu_v = -\kappa p_v$$

$$\left(\begin{array}{l} \nu_{uv} = -\kappa_v p_u - \kappa p_{uv} \\ \quad \shortparallel \qquad\qquad\qquad\quad \shortparallel \\ \nu_{vu} = -\kappa_u p_v - \kappa p_{vu} \end{array} \right)$$

"$\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2}{\partial v \partial u}$" (C^∞)

$$\kappa_v p_u = \kappa_u p_v$$

p_u, p_v: lin indep.（いちじどくりつ） $\Rightarrow$ $\kappa_u = \kappa_v = 0$ $\Rightarrow$ $\kappa = \mathrm{const}$

$K=0$: Weingarten : $\nu_u = 0$ $\quad \nu_v = 0$

ν : const. $\quad \mathbb{P}$ fix

$(p(u,v) - p(u_0,v_0))\cdot\nu = \varphi(u,v)$ とおくと

$\varphi_u = p_u\cdot\nu = 0 \qquad \varphi_v = 0$

$\varphi = \text{const} = \varphi(u_0,v_0) = 0$ $\quad \mathbb{P}$を通り νに直交

したがって $p(u,v)$ は 平面 $\{(x-\mathbb{P})\cdot\nu = 0\}$

上にある.

$K \neq 0$ Weingarten:

$$\nu_u = -K p_u \qquad \nu_v = -K p_v$$

$$\left(p_u + \frac{1}{K}\nu_u\right) = \left(p_v + \frac{1}{K}\nu_v\right) = 0$$

K: const

$$\underbrace{p + \frac{1}{K}\nu}_{\mathbb{P}} = \text{const.}$$

$$\left|(p - \mathbb{P})\right| = \left|-\frac{1}{K}\nu\right| = \frac{1}{|K|}$$

p は $\mathbb{P}$ を中心とする半径 $\frac{1}{|K|}$ の球面上

ガウスの公式

Christoffel.

クリストッフェル記号 Γ^k_{ij} :

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12}(=\Gamma^1_{21}) & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12}(=\Gamma^2_{21}) & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\widehat{I}^{-1}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

$\widehat{I}$ の成分

定理 (ガウスの公式)

Pu のビブン

2

Puのビブン

- $p_{uu} = \Gamma^1_{11}p_u + \Gamma^2_{11}p_v + L\nu,$
- $p_{uv} = \Gamma^1_{12}p_u + \Gamma^2_{12}p_v + M\nu,$
- $p_{vv} = \Gamma^1_{22}p_u + \Gamma^2_{22}p_v + N\nu.$

$$p_{uu} = a^1 p_u + a^2 p_v + b\,\nu$$

$(p_u\ p_v\ \nu)$ $\mathbb{R}^3$の基底(各(u,v)において)

とおける。

$p_u \perp \nu$ $\quad p_v \perp \nu$

$$b = p_{uu}\cdot\nu = L$$

← II の成分

① $p_{uu}\cdot p_u = a^1 p_u\cdot p_u + a^2 p_v\cdot p_u$

$$= E a^1 + F a^2$$

② $p_{uu}\cdot p_v = F a^1 + G a^2$

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \mathrm{I}^{-1}\begin{pmatrix} ① \\ ② \end{pmatrix}$$

① $= \frac{1}{2}(p_u\cdot p_u)_u = \frac{1}{2}E_u$

② $= (p_u\cdot p_v)_u - p_u\cdot p_{\cancel{vu}} = F_u - \frac{1}{2}E_v$

部分

uv

$\frac{1}{2}(p_u\cdot p_u)_v$

例：等温座標系の場合 $E=G \quad F=0$

$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$, $II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ のとき

E $\quad a^1 \quad a^2$

$$
\begin{aligned}
p_{uu} &= \sigma_u p_u - \sigma_v p_v + L\nu,\\
p_{uv} &= \sigma_v p_u + \sigma_u p_v + M\nu,\\
p_{vv} &= -\sigma_u p_u + \sigma_v p_v + N\nu.
\end{aligned}
$$

$p_u^\perp \; p_u$

$$p_{uu}\cdot p_u = a^1 p_u\cdot p_u = a^1 E = a^1 e^{2\sigma}$$

$$(p_u\cdot p_u)_u = \frac{1}{2}(e^{2\sigma})_u$$

σ_u

一般論：ガウス枠とガウス・ワインガルテン方程式

Gauss Frame

$$\mathcal{F} := (\overset{3\times 3}{p_u, p_v, \nu}) : U \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})：ガウス枠$$

正則行列全体（一般線型群）

定理 (定理 5.2)

(p_{uu}, p_{vu}, ν_u)

$$\boxed{\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,}$$

$\mathcal{F}$

E F G

L M N

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}$$

（これらを介して曲面を復元する式）

$$\mathcal{F}\Omega = (p_u\ p_v\ \nu)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \Big(\Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v + L\nu, \cdots\Big)$$

可積分条件

適合条件

とける

命題 (命題 5.3)

E, F, G, L, M, N は

これをみたすべき。

$$\boxed{\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O}$$

3本の式

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega \qquad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$$

$$\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_v\Omega + \mathcal{F}\Omega_v = \mathcal{F}\Lambda\Omega + \mathcal{F}\Omega_v = \cancel{\mathcal{F}}(\Lambda\Omega + \Omega_v)$$

$$\|$$

$$\mathcal{F}_{vu} = \cancel{\mathcal{F}}(\Omega\Lambda + \Lambda_u)$$

穴のない　円板と同相

定理 (曲面論の基本定理)

$\mathbb{R}^2$ の $\boxed{単連結領域 U}$ 上で定義された 6 つの C^∞-級関数 E, F, G, L, M, N が $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$ および

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$$

を満たすならば，正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ で第一基本量，第二基本量がそれぞれ E, F, G, L, M, N となるものが，合同変換を除きただ一つ存在する．

$\hat{\mathrm{I}}$ と $\hat{\mathrm{II}}$: 曲面をきめる．

(証明しない) : $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$ をとく

問題 5-1

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一・第二基本形式が次の形であるとする：

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

ただし σ, L, M, N は U で定義された C^∞-級関数，(u, v) は $\mathbb{R}^2$ の座標である．

$H = 0$

- p が極小曲面であるとき p の各成分は (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい．

$p_{uu} + p_{vv} = 0$

- p の平均曲率が一定のとき，M, $L - N$ は共に (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい．

可積分条件

問題 5-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式，第二基本形式が

$$ds^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}\,du^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}\,dv^2, \qquad II = c\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(du^2 - dv^2)$$

(u, v)

と表されているとする．ただし $(\cancel{\xi}, \cancel{\eta})$ は $\mathbb{R}^2$ の座標，$\theta\colon U \to (0, \pi)$ は C^∞-関数，c は正の定数である．

- p のガウス曲率を求めなさい．
- 可積分条件を θ に関する方程式として具体的に記述しなさい．

本日の課題の提出締切は

2023年1月30日（月曜日）07:00 JST