幾何学概論第二 (MTH.B212)

曲面論の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/19

第一基本量・第二基本量（復習）

- $U \subset \mathbb{R}^2$：uv 平面の領域
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$\nu$：単位法線ベクトル

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \widehat{II} &:= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) \\ &= -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

主曲率・ガウス曲率・平均曲率（復習）

$p(u, v)$: 正則曲面

定義

ワインガルテン行列 $A := \widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ の

- 固有値 κ_1, κ_2 を主曲率という．
- 主曲率の平均を平均曲率という：

$$H := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A.$$

- 主曲率の積をガウス曲率という：

$$K := \kappa_1\kappa_2 = \det A = \frac{\det \widehat{II}}{\det \widehat{I}}.$$

ワインガルテンの公式

定理 (ワインガルテンの公式，定理 3.4)

$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$，すなわち

$$\begin{aligned} \nu_u &= -A_1^1 p_u - A_1^2 p_v \\ \nu_v &= -A_2^1 p_u - A_2^2 p_v \end{aligned}$$

事実

すべての点が臍点ならば，球面または平面の一部

ガウスの公式

クリストッフェル記号 Γ_{ij}^k：

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 (= \Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 (= \Gamma_{21}^2) & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \widehat{I}^{-1} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

定理 (ガウスの公式)

$$\begin{aligned} p_{uu} &= \Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v + L\nu, \\ p_{uv} &= \Gamma_{12}^1 p_u + \Gamma_{12}^2 p_v + M\nu, \\ p_{vv} &= \Gamma_{22}^1 p_u + \Gamma_{22}^2 p_v + N\nu. \end{aligned}$$

例：等温座標系の場合

$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$, $II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ のとき

$$
\begin{aligned}
p_{uu} &= \sigma_u p_u - \sigma_v p_v + L\nu, \\
p_{uv} &= \sigma_v p_u + \sigma_u p_v + M\nu, \\
p_{vv} &= -\sigma_u p_u + \sigma_v p_v + N\nu.
\end{aligned}
$$

一般論：ガウス枠とガウス・ワインガルテン方程式

$\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu) : U \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$：ガウス枠

定理 (定理 5.2)

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = F\Lambda,$$
$$\left(\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}\right)$$

可積分条件

命題 (命題 5.3)

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$$

曲面論の基本定理

定理 (曲面論の基本定理)

$\mathbb{R}^2$ の単連結領域 U 上で定義された 6 つの C^∞-級関数 E, F, G, L, M, N が $E>0$, $G>0$, $EG-F^2>0$ および

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$$

を満たすならば，正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ で第一基本量，第二基本量がそれぞれ E, F, G, L, M, N となるものが，合同変換を除きただ一つ存在する．

問題 5-1

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一・第二基本形式が次の形であるとする：

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

ただし σ, L, M, N は U で定義された C^∞-級関数，(u,v) は $\mathbb{R}^2$ の座標である．

- p が極小曲面であるとき p の各成分は (u,v) に関する調和関数であることを示しなさい．
- p の平均曲率が一定のとき，M, $L-N$ は共に (u,v) に関する調和関数であることを示しなさい．

問題 5-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式，第二基本形式が

$$ds^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}\,du^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}\,dv^2, \qquad II = c\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(du^2 - dv^2)$$

と表されているとする．ただし (ξ, η) は $\mathbb{R}^2$ の座標，$\theta\colon U \to (0,\pi)$ は C^∞-関数，c は正の定数である．

- p のガウス曲率を求めなさい．
- 可積分条件を θ に関する方程式として具体的に記述しなさい．