2023 年 1 月 19 日 (2023 年 2 月 2 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

# 幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 5

## ■お知らせ

- 22 名の方から課題の提出がありました．T2SCHOLA よりフィードバックしています．
- 次回，**1 月 26 日**に**定期試験予告**を行います．なお，試験会場は H114 となります．
- 学生調査 2022 年追加調査にご協力ください．回答期限 1 月 27 日．教務 web システムより回答できます．

## ■前回の補足

- 複数のご質問があったので：すべての点が臍点である曲面は平面または球面（の一部）である．テキスト 98 ページ，命題 9.6.

## ■前回までの訂正

- 20230105 映写資料 B の 14, 15 ページ，左辺の行列の $(2,2)$-成分：$(F_x^2+F_z^2)F_xx+F_y^2F_{zz} \Rightarrow (F_x^2+F_z^2)F_{xx}+F_y^2F_{zz}$

## ■授業に関する御意見

- どんどん図やグラフが複雑になってきているような気がします．空間図形をイメージするのも苦手なので，自分で解いている問題がいったいどんな図形なのかもわからずにただただ計算しているような感じです．　**山田のコメント：**「空間図形をイメージする」とはどういうことかあまりわからないのですが，イメージできない人こそ「計算で理解する」ことが重要になります．もちろん高次元の図形など，素朴には「イメージできない」ものを実感するためにも計算による経験を積むことが必要．
- 結構内容が盛りだくさんになってきたので，そろそろ復習しないとまずいです．　**山田のコメント：**そろそろ，ね．
- 3Q では解析の知識を多く使ってきた気がしますが，4Q では線形代数の知識が多い気がします．1 年のとき理解しないまま進んだので，復習しながらやっています．　**山田のコメント：**次元があがると線形代数の重要性が増しますね．
- 線形代数の基礎知識が間につめられていて，忘れていたものを復習する良い機会になっています．
  **山田のコメント：**よかった．理論は使ってみないと身につきませんね．
- テスト中にドアが開閉すると前の方の人にはあまり嬉しくない影響がでそうです．何か対策をしていただけると助かります．
  **山田のコメント：**了解．試験室変更しました．
- 提出期限が長くて助かりました．/締め切りの延期助かりました．　**山田のコメント：**今回は 1 月 30 日.
- 提出シメ切り時間を夜にしていただきたいです．　**山田のコメント：**作業時間から日曜日の夜以前になりますが，それでよい？

## ■質問と回答

**質問 1：** 講義資料定理 4.4 について，曲線に対しては法曲率が定義されていますが,「曲面上の点 P における法曲率」とはどのような定義ですか?　**お答え：**直前で定義した「P における $\boldsymbol{v}$ 方向の法曲率」を論じている．

**質問 2：** umbilic point でない点では法曲率の最大値・最小値が主曲率に一致するというのは，偶然の一致ですか．それともワインガルテン行列がそうなるように作られた量なのですか．

**お答え：** 後者．実際，$A$ を対称行列としたとき（曲面の場合は各点においてこのようにできることを前回示した），二次形式 $Q\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \mapsto {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の $\{|\boldsymbol{x}|=1\}$ における最大値・最小値が $A$ の固有値であることは容易にわかる．

**質問 3：** 法曲率 $\ddot{\gamma}\cdot\nu$ は $\ddot{\gamma}\cdot\nu=\dot{u}^2L+2\dot{u}\dot{v}M+\dot{v}^2N$ ですが，$L=p_{uu}\cdot\nu$, etc であり，$p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}$ を含んでいるので加速度ベクトルに依存していると思うのですが，なぜ依存していないのですか．　**お答え：**命題 4.3 は「曲線の加速度ベクトルに依存しない」と読んでください．（すなわち最初の方の「曲線の」が後半にもかかる．）曲面を与えたときに，その上を走る曲線の加速度に依存しない，すなわち $\ddot{u}, \ddot{v}$ に依存しない，ということです．

**質問 4：** 法曲率が正である点ではその曲線で曲面を切ったときにその点で凹んでいて，負であるところでは膨らんでいるということですか? 単位法線ベクトルとの内積を取ることで曲面の凹み具合や膨らみ具合が表せているような気がします．　**お答え：**はい．テキスト 94 ページ，定理 9.1.

**質問 5：**「曲面の各点における主曲率は実数である」ということをわざわざ主張するのはなぜですか？ 次元が高くなると虚数になったりするのですか？　**お答え：**この講義での主曲率の定義は「ワインガルテン行列の固有値」．固有値が実数であることが自明であると思えるなら，わざわざ主張しなくてもよいと思います．

**質問 6：** 主方向はプラマイの自由度がある気がするのですがどちらをとったらよいのでしょうか? **お答え：**どちらでも．

**質問 7：** せい点は主方向を定義していませんが，$C^\infty$ 級曲面ならあらゆる点で，その点に近傍ではグラフ表示されるはずなので，せい点を取り除いてしまうのは，その曲面全体を見ていないのではないでしょうか．

**お答え：** 臍点を除いているのは「主方向を考えるとき」のみ．まったく臍点を考えないわけではない．

**質問 8：** P が臍点であるとき 2 つの主方向の関係はどのようになりますか？ **お答え：**主方向が決まりません.

**質問 9：** 今回のお話を聞くと umbilic point が特異点的というか，嫌われ者のような扱いを受けているように見えたのですが，逆に umbilic point が与えてくれる曲面についての情報はありますか？ **お答え：**特異点的なので曲面の情報がそこ集約されているとみなせる．臍点の「指数」とその大域的な性質がテキスト §14 で扱われている．

**質問 10：** $K = H^2$ が臍点であるための必要十分条件になるので，臍点かどうかを判定するだけなら主曲率を出さなくても良さそうだけど，臍点かどうかを判定することに意味はあるのか． **お答え：**ある．上の質問・回答参照.

**質問 11：** 臍点でない点のまわりでは，グラフ表示を使って曲面を二次曲面で近似することができると思うのですが，臍点のまわりを何か "簡単な" 曲面により近似することはできますか．また, 臍点だと都合の悪いこととして例えばどのような性質があるのでしょうか． **お答え：**前半：回転放物面 $z = \frac{\kappa}{2}(x^2 + y^2)$．ただし $\kappa$ は（重複した）主曲率．球面 $z = \frac{1}{\kappa}\left(1 - \sqrt{1 - \kappa^2(x^2 + y^2)}\right)$ も二次近似を与える．後半：曲率線座標の存在.

**質問 12：** 系 4.6 は，曲面は点 P の近傍で $p(x, y) = {}^t(x, y, f(x, y))$ と滑らかな関数で表され，${}^t(\kappa_1, \kappa_2) = \operatorname{grad} f$ となるということでしょうか． **お答え：**前半：はい．後半：いいえ．微分の階数が違います.

**質問 13：** 例 4.8 では $K > 0$ と $K < 0$ の点を挙げていましたが，$K = 0$ なら (1) 臍点でないとき，片方が 0 なので漸近方向が 1 つ存在し (2) 臍点のとき，主曲率が 0 なので P の近傍で平面になると考えましたがどうでしょうか.

**お答え：** (1) はい (2) いいえ．平面で 2 次近似できる．一般に平面にはなりません.

**質問 14：** 今回の講義資料の質問のお答えの中に主曲率だけでは曲面が決まらないとありますが，どこまで情報を与えれば (合同変換を除いて) 曲面が決まりますか？ **お答え：**曲面論の基本定理．今回解説する.

**質問 15：** 上の質問に関連しますが，各点の主曲率がまったく一致するにもかかわらず合同変換により移りあわない曲面の例としてどんなものがありますか． **お答え：**問題 4-2.

**質問 16：** $p = {}^t(x, y, \varphi(x)\psi(y))$ と表される極小曲面は $x$, $y$ の陽な形で表されるのでしょうか． **お答え：**$z = x \tan ky$

**質問 17：** 極小曲面がセッケン膜などに表れると話されていたと思うのですが，前回の課題であつかったシャーク曲面は自然界に表れる（原文ママ：字が違う？）のでしょうか．例えばセッケン膜でシャーク曲面をつくれたりするのでしょうか． **お答え：**できないことはない.

**質問 18：** 4-1 をやろうとして円錐に良さげな座標 $p(u, v) = \frac{u}{\sqrt{a^2+1}}{}^t(a \cos v, a \sin v, 1)$ を考えてみると $|p_u| = 1$, $p_u \cdot p_v = 0$ や良いのですが，$|p_v| = \frac{a}{a^2+1}u \neq 0$ となってしまいます．このような（ある意味）自然な座標でも性質が良くない ($\widehat{I} = I$) のでどのような座標を取ると $\widehat{I} = I$ のように性質が良くなるのかが気になります.

**お答え：** 円錐面なので平面に展開できますよね.

**質問 19：** うまくパラメータ変換と合同変換を用いると，$E = G$, $F = 0$ となるような，つまり，曲面への写像に移す前とうつったあとでの角度をたもつものがいつでもできますか.

**お答え：** はい．テキスト §15 で「等温座標系」に言及しています．ただし (1) 証明は自明でない (2) 2 次元の特殊事情.

**質問 20：** 折り目とカスプ以外の特異点はありますか？

**お答え：** $\mathbb{R}^2$ の領域から $\mathbb{R}^2$ への可微分写像についてですか（折り目とカスプはそう)．はい，いろいろあります.

**質問 21：** ガウス曲率や平均曲率は発散することはありますか.

**お答え：** 正則曲面上の点で well-defined なのだからそこで発散するわけがない．特異点に近づく時はものによる.

**質問 22：** 主曲率でガウス曲率と平均曲率を表せますが，ガウス曲率と平均曲率をわざわざ定義するのはなぜでしょうか．主曲率のみの定義はダメなのですか． **お答え：**ガウス曲率，平均曲率にそれぞれ意味がある．たとえば例 4.8.

**質問 23：** 数学で法がつくと直交するイメージでしたが，今回の法曲率は何かと直交しているのでしょうか.

**お答え：** 加速度ベクトルの「法線成分」.

**質問 24：** ラグランジュの未定係数法はラグランジュの未定乗数法と同じものを表していますか．また，なぜ未定「係数」法や未定「乗数」法という言葉が入っているのでしょうか？ 未定係数法は化学反応式の係数を求める方法でもあった気がするのですがなにか関係があったりするのでしょうか？

**お答え：** 前半：はい．$F = f - \lambda g$ とおくときの係数 $\lambda$ を未定係数とよびます．後半：たぶん関係ない.

**質問 25：** $A$ の固有値 $\kappa_1$, $\kappa_2$ に対する固有ベクトルが $(1, 0)$, $(0, 1)$ のとき，$A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$ とかいていい理由がよく分かりません. もとの $A$ から勝手に変形している気がします． **お答え：**固有値の定義から $A\binom{1}{0} = \binom{\kappa_1}{0}$, $A\binom{0}{1} = \binom{0}{\kappa_2}$.

**質問 26：** 対角化可能だとスカラー行列で表されるという部分がわからなかったです. **お答え：**切り取りがおかしい. 対角化可能ですべての固有値が一致する行列はスカラ行列. 実際, 対角化可能な行列 $A$ の固有値が全て $\lambda$ ならば正則行列 $P$ によって $P^{-1}AP = \lambda I$ とできる. 両辺に左から $P$, 右から $P^{-1}$ をかけると $A = \lambda P^{-1}IP = \lambda P^{-1}P = \lambda I$.

**質問 27：** $E$, $F$, $G$, $L$, $M$, $N$, $\nu$, $A$ はやはり定義通りに計算しないと出ないのでしょうか． **お答え：**ものによる？

# 5 曲面論の基本定理

ここでは断りのない限り $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 $U$ で定義された $C^\infty$-級正則曲面，$\nu$ を $p$ の単位法ベクトル場とする．

**■ガウス曲率・平均曲率・主曲率（復習）** 正則曲面 $p$ の第一・第二基本行列は次のように定義された：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v \\ p_v\cdot p_u & p_v\cdot p_v \end{pmatrix}, \quad \widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_u\cdot \nu_u & p_u\cdot \nu_v \\ p_v\cdot \nu_u & p_v\cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu}\cdot \nu & p_{uv}\cdot \nu \\ p_{vu}\cdot \nu & p_{vv}\cdot \nu \end{pmatrix}.$$

第一基本行列 $\widehat{I}$ の固有値は正，とくに $\det\widehat{I}>0$ なので，次のように**ワインガルテン行列** $A$ が定義される：

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

**事実 5.1.**
- ワインガルテン行列 $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ は実数である（主曲率）．
- 主曲率はパラメータのとり方によらない．$H=\frac{1}{2}\operatorname{tr}A$, $K=\det A$ を各々平均曲率，ガウス曲率という．
- ワインガルテンの公式 $(\nu_u,\nu_v)=-(p_u,p_v)A$.

**■クリストッフェル記号とガウスの公式** 正則曲面と単位法ベクトル場の定義から各点 $(u,v)\in U$ において $\{p_u(u,v),p_v(u,v),\nu(u,v)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与える．とくに $\mathcal{F}:=(p_u,p_v,\nu)$ とおくと，各点 $(u,v)$ において $\mathcal{F}$ は正則行列を与える：$\mathcal{F}\colon U\to\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$. [*1] これを正則曲面 $p$ の**ガウス枠**という．とくに次が成り立つ：

$$ {}^t\mathcal{F}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} {}^tp_u \\ {}^tp_v \\ {}^t\nu \end{pmatrix}(p_u,p_v,\nu) = \begin{pmatrix} p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v & p_u\cdot\nu \\ p_v\cdot p_u & p_v\cdot p_v & p_v\cdot\nu \\ \nu\cdot p_u & \nu\cdot p_v & \nu\cdot\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

**定理 5.2** (ガウス・ワインガルテンの公式)**.** 曲面 $p=p(u,v)$ のガウス枠 $\mathcal{F}$ は次を満たす：

$$\mathcal{F}_u=\mathcal{F}\Omega,\quad \mathcal{F}_v=\mathcal{F}\Lambda,\quad \left(\Omega=\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & -A^1_1 \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & -A^2_1 \\ L & M & 0 \end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix} \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & -A^1_2 \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} & -A^2_2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}\right) \tag{5.3}$$

$$\text{ただし}\quad \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12}(=\Gamma^1_{21}) & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12}(=\Gamma^2_{21}) & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} := \frac{1}{2}\,\widehat{I}^{-1}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v-G_u \\ 2F_u-E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

**証明：** $\mathcal{F}$ は正則行列に値をもつ関数だから $\Omega:=\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_u$, $\Lambda:=\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_v$ は $C^\infty$-級の行列値関数．とくに，ワインガルテンの公式から $\Omega$ と $\Lambda$ の第 3 列は (5.3) の形をしていることがわかる．第二基本形式の定義から $\Omega$, $\Lambda$ の第 3 行も (5.3) であることがわかるから，あとは

$$(p_{uu},p_{uv}(=p_{vu}),p_{vv}) = (p_u,p_v,\nu)\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12}(=\Gamma^1_{21}) & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12}(=\Gamma^2_{21}) & \Gamma^2_{22} \\ L & M & N \end{pmatrix} = \mathcal{F}\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \\ L & M & N \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

とおいたときの $\Gamma^k_{ij}$ が (5.3) の 2 行目の形になることを示せば良い．ここで，

$$\begin{aligned}
&p_{uu}\cdot p_u = \frac{1}{2}(p_u\cdot p_u)_u = \frac{1}{2}E_u, && p_{uu}\cdot p_v = (p_u\cdot p_v)_u - p_u\cdot p_{vu} = F_u-\frac{1}{2}E_v, && p_{uu}\cdot\nu = L,\\
&p_{uv}\cdot p_u = \frac{1}{2}(p_u\cdot p_u)_v = \frac{1}{2}E_v, && p_{uv}\cdot p_v = \frac{1}{2}G_u, && p_{uv}\cdot\nu = M,\\
&p_{vv}\cdot p_u = F_v-\frac{1}{2}G_u && p_{vv}\cdot p_v = \frac{1}{2}G_v, && p_{vv}\cdot\nu = N
\end{aligned}$$

2023 年 1 月 19 日 (2023 年 2 月 2 日訂正)

[*1] $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ で実数を成分とする 3 次正則行列全体を表す．

なので，(5.4) の両辺に左から ${}^t\mathcal{F}$ をかけると，

$$
{}^t\mathcal{F}(p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \\ 2L & 2M & 2N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \\ L & M & N \end{pmatrix}
$$

となるので，$\Gamma_{ij}^k$ が求まる．

式 (5.3) の最初の 2 式をガウスの公式，$\Gamma_{ij}^k$ を**クリストッフェル記号**という．クリストッフェル記号は第一基本量 $E$, $F$, $G$ とその偏導関数で表される．したがって $\Omega$, $\Lambda$ は曲面の第一基本量，第二基本量から定まる行列である．

**命題 5.3.** 式 (5.3) で定義された $\Omega$, $\Lambda$ は次を満たす：

$$
\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O. \tag{5.5}
$$

**証明：** 式 (5.3) の最初の二式をそれぞれ $v$, $u$ で微分すると

$$
\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_v\Omega + \mathcal{F}\Omega_v = \mathcal{F}\Lambda\Omega + \mathcal{F}\Omega_v, \qquad \mathcal{F}_{vu} = \mathcal{F}\Omega\Lambda + \mathcal{F}\Lambda_u.
$$

これらが等しいので $\mathcal{F}^{-1}$ を左からかければ結論が得られる．

このことから，曲面の第一基本量，第二基本量は独立ではなく，等式 (5.5) を満たさなければならないことがわかる．(5.5) をガウス・ワインガルテンの公式の**可積分条件・適合条件**と呼ぶ．ここでは証明を与えないが，次が成り立つ：

**定理 5.4** (曲面論の基本定理)**.** $\mathbb{R}^2$ の単連結領域[*2] $U$ 上で定義された 6 つの $C^\infty$-級関数 $E$, $F$, $G$, $L$, $M$, $N$ が (5.5), $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$ を満たすならば，正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ で第一基本量，第二基本量がそれぞれ $E$, $F$, $G$, $L$, $M$, $N$ となるものが，合同変換を除きただ一つ存在する．

## 問題

5-1 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一・第二基本形式が次の形であるとする：

$$
ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.
$$

ただし $\sigma$, $L$, $M$, $N$ は $U$ で定義された $C^\infty$-級関数，$(u, v)$ は $\mathbb{R}^2$ の座標である．

- $p$ が極小曲面であるとき $p$ の各成分は $(u, v)$ に関する調和関数であることを示しなさい．
- $p$ の平均曲率が一定のとき，$M$, $L - N$ は共に $(u, v)$ に関する調和関数であることを示しなさい．

5-2 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式，第二基本形式が

$$
ds^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}\,du^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}\,dv^2, \qquad I\!I = c\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(du^2 - dv^2)
$$

と表されているとする．ただし $(\xi, \eta)$ は $\mathbb{R}^2$ の座標，$\theta\colon U \to (0, \pi)$ は $C^\infty$-関数，$c$ は正の定数である．

- $p$ のガウス曲率を求めなさい．
- 可積分条件を $\theta$ に関する方程式として具体的に記述しなさい．

[*2] $\mathbb{R}^2$ の「穴の空いていない」領域．