幾何学概論第二 (MTH.B212)

測地線とガウス・ボンネの定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/26

直線

曲面上：測地線 geodesic

- $\mathbb{R}^n$ の外力が働かない質点の運動の軌跡は直線である．

$\gamma(t)$：運動

等速直線運動

パラメータの取方による

$\ddot{\gamma} = 0$：外力が働かない

$\gamma(t) = tv + a$　　$v, a \in \mathbb{R}^n$

・時刻 $t=0$ で $\vec{OA} = a$ となる点 A を

$\dot{\gamma}$：一定　通る，速度 v の運動

・A を通るひたすらな直線

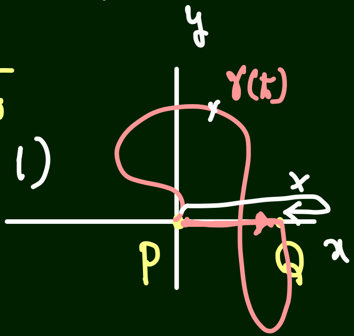
直線

$\approx$ 準測地線 : pregeodesic 速度はムシでイイ

- $\mathbb{R}^2$ の異なる２点 P, Q を結ぶ曲線のうち最短のものは線分 PQ である．

・回転と平行移動で $P=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}L\\0\end{pmatrix}$ $L>0$ としてよい

・$\gamma(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$
$x(1)=L$
$x(0)=0$
$(0\leqq t\leqq 1)$



$\gamma(0)=P$, $\gamma(1)=Q$

$\boxed{\text{パラメータのとり方によらない}}$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \overset{①}{\geq} \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 |\dot{x}|\,dt \overset{②}{\geq} \left| \int_0^1 \dot{x}\,dt \right|$$

$$= |x(1) - x(0)| = L = \text{線分PQの長さ}$$

・線分PQは最短線

・最短線は線分PQ

$\because$ $L(\gamma) = L \Rightarrow$ ①②等号

$\Rightarrow \dot{y} = 0 \quad \dot{x} \geq 0$ (x:単調非減少) □

曲面上の最短線

定理

証明しない.

正則曲面 $p(u,v)$ $((u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2)$ の像の上の 2 点

$$\mathrm{P} := p(u_\mathrm{P}, v_\mathrm{P}), \qquad \mathrm{Q} := p(u_\mathrm{Q}, v_\mathrm{Q})$$

・最短線の存在しないこともある

を結ぶ曲線 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ を次のように表示する：

これをみたしても最短でないこともある

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)), \qquad \begin{cases} (u(0), v(0)) &= (u_\mathrm{P}, v_\mathrm{P}), \\ (u(1), v(1)) &= (u_\mathrm{Q}, v_\mathrm{Q}). \end{cases}$$

・一意でないこともある.

ただし $t \mapsto (u(t), v(t))$ は $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の正則曲線.
もしも γ が P, Q を結ぶ最短線ならば 各 $t \in [0,1]$ に対して

法線方向

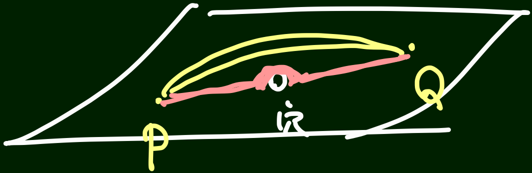
$$\ddot{\gamma}(t) \in \operatorname{Span}\{\dot{\gamma}(t), \nu(u(t), v(t))\}$$

よりみちをしない.

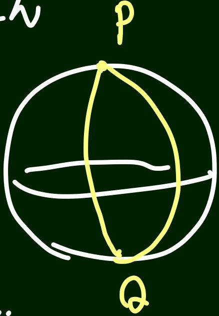
接線や

が成り立つ．ただし ν は曲面の単位法線ベクトル場である.

ア 最短線



最短線がたくさん

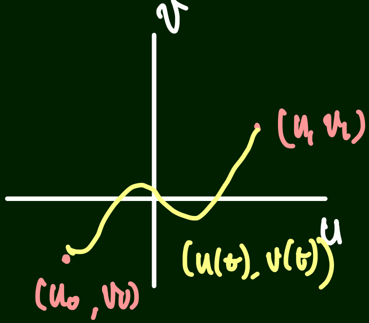


∃ 長さの下限

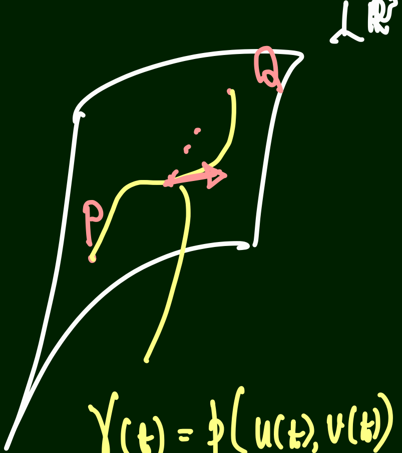
下限に近づく列はつくれるが
下限をとる曲線は
ない

条件をみたして
も最短線でない.

：球面上の大円の長い方の弧



$\overset{p}{\curvearrowright}$



$$\gamma(t) = p(u(t), v(t))$$

γ: 束縛力のみはたらく

球面上の最短線

球面の中心を通る平面

事実

球面上の２点を結ぶ最短線は大円の弧のうち長くない方である．

(e.g. 赤道, 子午線
一般に緯線はちがう)