幾何学概論第二 (MTH.B212)

測地線とガウス・ボンネの定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/26

直線

- $\mathbb{R}^n$ の外力が働かない質点の運動の軌跡は直線である.

直線

- $\mathbb{R}^2$ の異なる 2 点 P, Q を結ぶ曲線のうち最短のものは線分 PQ である.

曲面上の最短線

定理

正則曲面 $p(u,v)$ ($(u,v)\in U\subset\mathbb{R}^2$) の像の上の 2 点

$$\mathrm{P}:=p(u_{\mathrm{P}},v_{\mathrm{P}}),\qquad \mathrm{Q}:=p(u_{\mathrm{Q}},v_{\mathrm{Q}})$$

を結ぶ曲線 $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R}^3$ を次のように表示する：

$$\gamma(t)=p(u(t),v(t)),\qquad \begin{cases}(u(0),v(0)) &= (u_{\mathrm{P}},v_{\mathrm{P}}),\\ (u(1),v(1)) &= (u_{\mathrm{Q}},v_{\mathrm{Q}}).\end{cases}$$

ただし $t\mapsto(u(t),v(t))$ は $U\subset\mathbb{R}^2$ 上の正則曲線.
もしも γ が P, Q を結ぶ最短線ならば，各 $t\in[0,1]$ に対して

$$\ddot{\gamma}(t)\in\mathrm{Span}\{\dot{\gamma}(t),\nu(u(t),v(t))\}$$

た成り立つ．ただし ν は曲面の単位法線ベクトル場である.

球面上の最短線

事実

球面上の 2 点を結ぶ最短線は大円の弧のうち長くない方である.