幾何学概論第二 (MTH.B212)

測地線とガウス・ボンネの定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/01/26

第一基本量・第二基本量（復習）

- $U \subset \mathbb{R}^2$：uv 平面の領域
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$\nu$：単位法線ベクトル

$$
\begin{aligned}
\widehat{I} &:= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \\
\widehat{II} &:= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) \\
&= -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ガウスの公式

クリストッフェル記号 Γ_{ij}^k：

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 (= \Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 (= \Gamma_{21}^2) & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2}\,\widehat{I}^{-1} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

定理 (ガウスの公式)

$$\begin{aligned} p_{uu} &= \Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v + L\nu, \\ p_{uv} &= \Gamma_{12}^1 p_u + \Gamma_{12}^2 p_v + M\nu, \\ p_{vv} &= \Gamma_{22}^1 p_u + \Gamma_{22}^2 p_v + N\nu. \end{aligned}$$

曲面に付随した $\mathbb{R}^3$ の直和分解

曲面上の点 $\mathrm{P} := p(u_0, v_0)$ をひとつ固定する.

- $dp(T_{(u_0,v_0)}U) := \mathrm{Span}\{p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)\}$.
- 直交直和分解

$$\mathbb{R}^3 = dp(T_{(u_0,v_0)}U) \oplus \mathbb{R}\nu(u_0, v_0)$$

- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = (\text{接成分}) + (\text{法成分})$$

曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ に対して

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= \dot{u}(t) p_u(u(t), v(T)) + \dot{v}(t) p_v(u(t), v(t)), \\
\ddot{\gamma}(t) &= [\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}} + [\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

準測地線と測地線

定義

曲面上の正則曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が

- 準測地線 $\Leftrightarrow$ $[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}}$ が $\dot{\gamma}(t)$ と一次従属.
- 測地線 $\Leftrightarrow$ $[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$

準測地線と測地線

命題

曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が,

- 測地線ならば，$|\dot{\gamma}(t)|$ は t によらず一定である.
- 準測地線ならば，パラメータを弧長に取り替えれば測地線である.

事実

曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち，長さ最小のものが存在するならばそれは準測地線である.

存在と一意性

命題

曲線 $p(u(t), v(t))$ が測地線 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{u} + \dot{u}^2\Gamma^1_{11} + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma^1_{12} + \dot{v}^2\Gamma^1_{22} & = 0 \\ \ddot{v} + \dot{u}^2\Gamma^2_{11} + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma^2_{12} + \dot{v}^2\Gamma^2_{22} & = 0 \end{cases}$$

事実

曲面 p 上の測地線 $\gamma(t)$ で，$\gamma(0) = p(u_0, v_0)$,
$\dot{\gamma}(0) = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$ となるものがただ一つ存在する．

存在と一意性

定理 (常微分方程式の基本定理)

- $J \subset \mathbb{R}$：区間；$U \subset \mathbb{R}^n$ 領域.
- $t_0 \in J$, $\boldsymbol{a} \in U$.
- $\boldsymbol{f} \colon J \times U \to \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \exists 1\ \boldsymbol{y} \colon J' \times \to \mathbb{R}^n\ (t_0 \in J' \subset J)$：$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(t; \boldsymbol{y}(t))$, $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{a}$.

$$\begin{cases} \ddot{u} + \dot{u}^2\Gamma^1_{11} + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma^1_{12} + \dot{v}^2\Gamma^1_{22} & = 0 \\ \ddot{v} + \dot{u}^2\Gamma^2_{11} + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma^2_{12} + \dot{v}^2\Gamma^2_{22} & = 0 \end{cases}$$

例

1. 曲面上にのっている直線が存在するならばこれは準測地線.
2. 球面の大円（中心を通る平面と球面の共通部分）は準測地線.

三角形のガウス・ボンネの定理

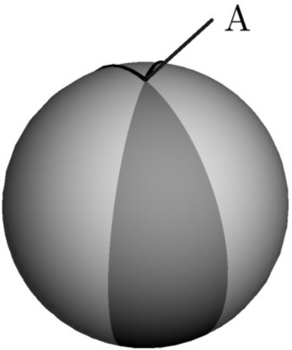
- $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\gamma_1(t)$,$\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$：
- $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \mathrm{B}$, $\gamma_2(1) = \gamma_3(0) = \mathrm{C}$, $\gamma_3(1) = \gamma_1(0) = \mathrm{A}$
- γ_j をつなげて得られるループの内部の閉包 $\Delta\mathrm{ABC}$ が閉円板と同相.
- $\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$,$\angle\mathrm{C}$：測地線が $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{B})$, $p(\mathrm{C})$ において各測地線分が成す角.

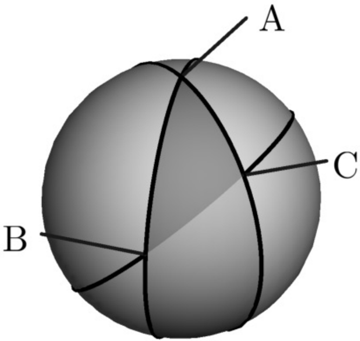
定理 (ガウス・ボンネの定理, テキスト 定理 10.6)

線分 $\hat{\gamma}_j = p \circ \gamma_j$ $(j = 1, 2, 3)$ が測地線であるとき,

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi + \int_{\Delta\mathrm{ABC}} K\,dA \qquad \left(dA = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv\right).$$

例：球面の場合





問題 6-1

問題

正の定数 a に対して，円錐面 $p(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r}{a}\right)$ $((r,\theta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi))$ の測地線 $\gamma(t)$ で，次の条件を満たすものを求めなさい：$\gamma(0) = p(1,0)$，$\dot{\gamma}(0) = p_\theta(1,0)$.

問題 6-2

問題

曲面 $p\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$ を
$p(u,v) := (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v-\tanh v)$ で与えるとき,
uv-平面上の曲線 $L_a := \{(u,v)\,;u=a, v>0\}$,
$C_{a,b} := \{(u,v)\,;(u-a)^2+\cosh^2 v = b^2, v>0\}$ に対応する曲面上の曲線は準測地線であることを示しなさい．ただし $a\in\mathbb{R}$, $b\in(1,\infty)$ は定数である．