2023 年 1 月 26 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

# 幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 6

## ■お知らせ

- 当方の不注意により，前回の課題締切を 1 月 30 日に設定してしまいました．したがって，申し訳ありませんが，
  - 今回は課題に関するコメントはできません．
  - それに伴い，講義内容を一部変更しています．
  - 今回の課題も 1 月 30 日が締め切りとなります．提出場所は別になりますのでご注意ください．
- 学勢調査 2022 年追加調査にご協力ください．回答期限は明日 **1 月 27 日**．教務 web システムより回答できます．
- 学修アンケートにご協力ください．T2SCHOLA より回答できます．

## ■定期試験予告　以下の要領で定期試験を行います：

**日時：** 2023 年 2 月 9 日（木）**10 時 45 分〜12 時 15 分**
**試験開始 5 分前には指定の座席に着席すること；座席表は，前日までに T2SCHOLA に公開する**

**場所：** **本館；H114** 　授業が行われている教室ではない

**範囲：** 主として 2 月 2 日までの授業で扱った内容．

**持込：** 紙媒体（ノート，教科書，参考書，メモ，計算用紙など）のみ持ち込み可．ただし，持ち込んだものは試験室の机上におくこと．試験中に鞄などから取り出すことは不可．

**禁止事項：** 携帯電話・スマートフォン・糸電話，狼煙を見るための双眼鏡・パーソナルコンピュータ・スーパーコンピュータ・数学が得意な友人など，紙媒体以外のものは持ち込み禁止．

**注意事項：**
- やむを得ない理由で**試験を受けられない方**は，**試験前**までに電子メイルにてご連絡ください．
- 連絡なしに試験を欠席された方は，**単位を得る権利を失います**．
- 答案は試験の翌週までに返却いたします．採点などに関するクレイムは，期間を限って受け付けます．詳細は試験問題に記します．

**成績評価：** 成績は**試験**と**課題**の得点から決定する．決定の方式は次の通り：課題の得点の合計を $x$ 点（$0 \leqq x \leqq 30$），課題得点のクラス最大値を $x_{\max}$ 点，試験の得点を $y$ 点（$0 \leqq y \leqq 100$）としたとき，

$$Z := 5 \times \left[\frac{z}{5}\right], \qquad z := (1-p)\left(\frac{100x}{x_{\max}}\right) + py, \qquad p := 0.3 + 0.7a$$

で与えられる $Z$ と $100$ のうち大きくない方を評価点とする．ただし，$[x]$ は $x$ を超えない最大の整数，係数 $a \in [0,1]$ は**試験答案提出時に受講者自身が決める定数**である．

## ■前回までの訂正

- 講義資料 5; 1 ページ「お知らせ」の第 2 項：**H116** ⇒ **H114**（映写資料 A，2 ページも同様に修正）
- 講義資料 5; 1 ページ「授業に関するご意見」の第 6 項; 山田のコメント：今回は通常通り ⇒ 今回は 1 月 30 日

# 6 測地線とガウス・ボンネの定理

ここでは断りのない限り $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 $U$ で定義された $C^\infty$-級正則曲面，$\nu$ を $p$ の単位法ベクトル場，$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ を第一基本形式，$I\!I=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$ を第二基本形式とする．

**■フルネ枠と可積分条件（復習）** 行列値関数 $\mathcal{F}=(p_u,p_v,\nu)\colon U\to\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ を**ガウス枠**と呼ぶ．

**定理 6.1** (ガウス・ワインガルテンの公式)**.** 曲面 $p=p(u,v)$ のガウス枠 $\mathcal{F}$ は次を満たす：

$$(6.1)\quad \mathcal{F}_u=\mathcal{F}\Omega,\quad \mathcal{F}_v=F\Lambda,\quad \left(\Omega=\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1&\Gamma_{12}^1&-A_1^1\\ \Gamma_{11}^2&\Gamma_{12}^2&-A_1^2\\ L&M&0\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\Gamma_{21}^1&\Gamma_{22}^1&-A_2^1\\ \Gamma_{21}^2&\Gamma_{22}^2&-A_2^2\\ M&N&0\end{pmatrix}\right)$$

$$\text{ただし}\quad \begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1&\Gamma_{12}^1(=\Gamma_{21}^1)&\Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{11}^2&\Gamma_{12}^2(=\Gamma_{21}^2)&\Gamma_{22}^2\end{pmatrix}:=\frac{1}{2}\widehat{I}^{-1}\begin{pmatrix}E_u&E_v&2F_v-G_u\\ 2F_u-E_v&G_u&G_v\end{pmatrix}.$$

**命題 6.2** (可積分条件)**.** 式 (6.1) で定義された $\Omega$, $\Lambda$ は次を満たす：

$$(6.2)\qquad \Omega_v-\Lambda_u-\Omega\Lambda+\Lambda\Omega=O.$$

**■準測地線と測地線** 曲面上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ に接する方向 $p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ が生成するベクトル空間（接ベクトル空間）を $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ と書く（講義資料 2, 3 ページ参照）と，$\mathbb{R}\nu(u_0,v_0)$ は接ベクトル空間の直交補空間だから，各 $(u_0,v_0)$ ごとに直交直和分解 $\mathbb{R}^3=dp(T_{(u_0,v_0)}U)\oplus\mathbb{R}\nu(u_0,v_0)$ が成立する．この直和分解にしたがって，ベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}+[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}$ と分解するとき，右辺第一項を $\boldsymbol{v}$ の（P における）**接成分**, 第二項を **法成分**という．とくに $[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}=(\boldsymbol{v}\cdot\nu(u_0,v_0))\nu(u_0,v_0)$ である．

曲面上の正則曲線 $\gamma(t)=p(u(t),v(t))$ の速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ は曲面に接するが，加速度ベクトル $\ddot\gamma(t)$ は一般にそうでない．そこで，各 $t$ において $\gamma(t)$ における直交分解 $\ddot\gamma(t)=[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}}+[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{N}}$ を考える[*1]．

**定義 6.3.** 曲面上の正則曲線 $\gamma(t)=p(u(t),v(t))$（パラメータは弧長とは限らない）が**準測地線**であるとは，各 $t$ で $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}}$ が $\dot\gamma(t)$ と一次従属となることである．また $\gamma$ が **測地線**であるとは，各 $t$ で $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$ を満たすことである．

**命題 6.4.** 曲面上の曲線 $\gamma(t)=p(u(t),v(t))$ が，

- 測地線ならば，$|\dot\gamma(t)|$ は $t$ によらず一定である．
- 準測地線ならば，パラメータを弧長に取り替えれば測地線である．

**証明：** 曲線 $\gamma$ が測地線ならば，$\dot\gamma\perp\nu$ であることに注意すれば $\frac{d}{dt}|\dot\gamma(t)|^2=2\ddot\gamma\cdot\dot\gamma=2\,[\ddot\gamma]^{\mathrm{T}}\cdot\dot\gamma=0$. したがって第一の主張が得られる．一方，$\gamma(t)$ が準測地線として $s=s(t)$ をその弧長関数とすると，$ds/dt=|\dot\gamma(t)|$ だから，$\hat\gamma(s):=\gamma(t(s))$（$t(s)$ は弧長関数の逆関数）として，単位接ベクトルを $\boldsymbol{e}(s):=d\hat\gamma(s)/ds=\dot\gamma(t(s))/|\dot\gamma(t(s))|$ とかくと，これは $\dot\gamma$ と平行．また $d^2\hat\gamma/ds^2$ は $\dot\gamma$, $\ddot\gamma$, $\nu$ の線形結合で表される．とくに準測地線であることから $\left[d^2\hat\gamma/ds^2\right]^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{e}$ と平行．一方 $\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)=\frac{d}{ds}\boldsymbol{e}(s)$ は単位ベクトル $\boldsymbol{e}(s)$ の微分だから $\boldsymbol{e}(s)$ に直交する．とくに $\left[\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)\right]^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{e}(s)$ に平行．したがって $\left[\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)\right]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$.

---

2023 年 1 月 26 日

[*1] もしも $t$ が $\gamma$ の弧長パラメータなら $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{N}}=\kappa_n(t)\nu(u(t),v(t))$ である．ただし $\kappa_n$ は $\gamma$ の法曲率．さらにこのとき，$[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\kappa}_t(t)$ を**測地的曲率ベクトル**とよぶ．これは $\dot\gamma(t)$，$\nu(u(t),v(t))$ に直交するベクトルである．

このことから測地線の概念は曲線のパラメータのとり方に依存するが，準測地線は曲線のパラメータによらないことが分かる．曲線 $\gamma$ が準測地線となるための必要十分条件は $\det(\dot\gamma, \ddot\gamma, \nu) = 0$ となることである．これを $(u(t), v(t))$ の式で表すと $\ddot u, \ddot v$ について解くことが一般にできないので微分方程式とはならないが，測地線は次のように微分方程式で特徴づけられる．

**命題 6.5** (測地線の方程式)**.** 曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\ddot u + \dot u^2 \Gamma^1_{11} + 2\dot u \dot v \Gamma^1_{12} + \dot v^2 \Gamma^1_{22} = 0, \qquad \ddot v + \dot u^2 \Gamma^2_{11} + 2\dot u \dot v \Gamma^2_{12} + \dot v^2 \Gamma^2_{22} = 0$$

を満たすことである．

ここで常微分方程式の基本定理を思い出そう：

**定理 6.6** (常微分方程式の基本定理)**.** 区間 $J \subset \mathbb{R}$ と領域 $U \subset \mathbb{R}^n$ の直積上で定義された $C^\infty$-関数 $\boldsymbol{f}\colon J \times U \to \mathbb{R}^n$ が与えられ，$t_0 \in J$，$\boldsymbol{a} \in U$ を固定する．このとき，$t_0$ を含む十分小さい区間 $J' \subset J$ 上で定義された $C^\infty$-級関数 $\boldsymbol{y}\colon J' \to \mathbb{R}^n$ で

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(t; \boldsymbol{y}(t)), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{a}$$

を満たすものがただ一つ存在する．

このことと命題 6.5 から

**系 6.7.** 曲面 $p$ 上の測地線 $\gamma(t)$ で，$\gamma(0) = p(u_0, v_0)$，$\dot\gamma(0) = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$ となるものがただ一つ存在する．

**例 6.8.**
- 曲面上にのっている直線が存在するならばこれは準測地線である．
- 球面の大円（中心を通る平面と球面の共通部分）は準測地線である．

**事実 6.9.** 曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち，長さ最小のものが存在するならばそれは準測地線である．

**■三角形のガウス・ボンネの定理**　正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して $U$ 上の曲線 $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ が $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \mathrm{B}, \gamma_2(1) = \gamma_3(0) = \mathrm{C}, \gamma_3(1) = \gamma_1(0) = \mathrm{A}$ を満たし，これらをつなげて得られるループの内部の閉包が閉円板と同相な閉領域 $\Delta\mathrm{ABC}$ であるとする．A, B, C で出会う曲線分が成す角をそれぞれ $\angle\mathrm{A}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C}$ と書くと，

**定理 6.10** (ガウス・ボンネの定理，テキスト 定理 10.6)**.** 線分 $\hat\gamma_j = p \circ \gamma_j$ $(j = 1, 2, 3)$ が測地線であるとき，

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi + \int_{\Delta\mathrm{ABC}} K\, dA \qquad (dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv).$$

**■2 次元多様体と曲面**

**定義 6.11. 2 次元（可微分）多様体** とは，第二可算公理を満たすハウスドルフ空間 $S$ と，$S$ の開集合族 $\{U_\alpha\,;\,\alpha \in A\}$, 各 $U_\alpha$ から $\mathbb{R}^2$ への連続な単射 $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^2\,;\,\alpha \in A\}$ の組 $(S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ で次を満たすものである：(1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = S$, (2) $\varphi_\alpha$ は $U_\alpha$ から $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ への同相写像 (3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ なら $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は微分同相写像.

「大域的な（正則）曲面」とは，2 次元可微分多様体 $S = (S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$ で，各 $\alpha$ に対して $p \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面を与えているものとする．

今回まで扱った正則曲面のさまざまな不変量はパラメータのとり方によらないので，大域的な曲面の不変量とみなすことができる．

**定義 6.12.** 2 次元可微分多様体 $(S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ が**向き付けられた**多様体である，とは各 $\alpha$, $\beta$ に対して，$\mathbb{R}^2$ の開集合間の微分同相写像 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ の Jacobi 行列式が常に正となるものである．

**定理 6.13** (大域的なガウス・ボンネの定理（テキスト，定理 10.7）)**.** コンパクトで向き付けられた 2 次元多様体 $S$ 上で定義された大域的な正則曲面 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$ に対して

$$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2-2g)$$

が成り立つ．ただし $K$, $dA$ はそれぞれ曲面のガウス曲率，面積要素，$\chi(S)$ は $S$ のオイラー数，$g$ は閉曲面 $S$ の種数である（テキスト §10 参照）.

## 問題

6-1 正の定数 $a$ に対して，円錐面 $p(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r}{a}\right)$ $((r,\theta) \in (0,\infty)\times(-\pi,\pi))$ の測地線 $\gamma(t)$ で，次の条件を満たすものを求めなさい：$\gamma(0) = p(1,0)$，$\dot\gamma(0) = p_\theta(1,0)$.

6-2 曲面 $p\colon \mathbb{R}\times(0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ を $p(u,v) := (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v - \tanh v)$ で与えるとき，$uv$-平面上の曲線 $L_a := \{(u,v)\,;\, u = a, v > 0\}$, $C_{a,b} := \{(u,v)\,;\,(u-a)^2 + \cosh^2 v = b^2, v > 0\}$ に対応する曲面上の曲線は準測地線であることを示しなさい．ただし $a \in \mathbb{R}$, $b \in (1,\infty)$ は定数である．