幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス・コダッチ方程式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/02/02

第一基本量・第二基本量（復習）

- $U \subset \mathbb{R}^2$：uv 平面の領域
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$\nu$：単位法線ベクトル

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0$$

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix},$$

$$A := \widehat{I}^{\,-1} \widehat{II},$$

$$K := \det A, \qquad H := \frac{1}{2} \operatorname{tr} A$$

ガウス・ワインガルテンの公式

クリストッフェル記号 Γ_{ij}^k：

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 (= \Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 (= \Gamma_{21}^2) & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \widehat{I}^{-1} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

ガウス・ワインガルテンの公式

$$\begin{aligned} p_{uu} &= \Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v + L\nu, \\ p_{uv} &= \Gamma_{12}^1 p_u + \Gamma_{12}^2 p_v + M\nu, \\ p_{vv} &= \Gamma_{22}^1 p_u + \Gamma_{22}^2 p_v + N\nu, \\ \nu_u &= -A_1^1 p_u - A_1^2 p_v \\ \nu_v &= -A_2^1 p_u - A_2^2 p_v \end{aligned}$$

ガウス枠

$\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu) : U \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$：ガウス枠

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = F\Lambda,$$
$$\left(\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix} \right)$$

可積分条件

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O \qquad (*)$$

定理 (曲面論の基本定理)

$\mathbb{R}^2$ の単連結領域 U 上で定義された 6 つの C^∞-級関数 E, F, G, L, M, N が $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$ および ($*$) を満たす
$\Rightarrow$ 正則曲面 $p \colon U \to \mathbb{R}^3$ で第一基本量，第二基本量がそれぞれ E, F, G, L, M, N となるものが，合同変換を除きただ一つ存在する．

問題 5-1

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一・第二基本形式が次の形であるとする：

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

ただし σ, L, M, N は U で定義された C^∞-級関数，(u, v) は $\mathbb{R}^2$ の座標である.

- p が極小曲面であるとき p の各成分は (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい.
- p の平均曲率が一定のとき，M, $L - N$ は共に (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい.

等温座標系

等温座標系：$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$ となるパラメータ (u, v).

- 局所的には等温座標系が存在する（テキスト §15）
- 2 つの等温座標系 (u, v) と (ξ, η) の間のパラメータ変換は

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_u &= \quad \eta_v \\ \xi_v &= -\eta_u \end{cases} \qquad \text{または} \qquad (2) \quad \begin{cases} \xi_u &= -\eta_v \\ \xi_v &= \quad \eta_u \end{cases}$$

  を満たす.
- (1) のとき，$z = u + iv \mapsto w = \xi + i\eta$ は複素解析的.

等温座標系におけるガウス・ワインガルテン方程式

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2),\ I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}L \\ -\sigma_v & \sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_v & -\sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}N \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

極小曲面

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

$H = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L + N).$

$$\begin{aligned}\Delta p = p_{uu} + p_{vv} &= \sigma_u p_u - \sigma_v p_v + L\nu - \sigma_u p_v + \sigma_v p_v + N\nu \\ &= (L + N)\nu = 2e^{2\sigma} H.\end{aligned}$$

等温座標系における可積分条件

$$\Omega_v - \Lambda_v - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -P & e^{-2\sigma}Q \\ P & 0 & e^{-2\sigma}R \\ Q & R & 0 \end{pmatrix} = O$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P = -\Delta\sigma - e^{-2\sigma}(LN - M^2) = 0 \\ Q = L_v - M_u - \sigma_v L - \sigma_v N = 0 \\ R = M_v - N_u - \sigma_u L - \sigma_u N = 0 \end{cases}$$

とくに

$$K = e^{-4\sigma}(LN - M^2) = -e^{-2\sigma}\Delta\sigma. \qquad \text{(ガウス方程式)}$$

驚異の定理

一般に

定理 (テキスト 111 ページ (10.10) 式)

ガウス曲率は第一基本量のみで表される.

- 正確な地図は作れない.
- 一般にガウス枠は直交行列にならない.

コダッチ方程式

$$\begin{aligned} Q &= L_v - M_u - \sigma_v L - \sigma_v N = 0 \\ R &= M_v - N_u - \sigma_u L - \sigma_u N = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

平均曲率一定の場合：

$$2H_u = (e^{-2\sigma}(L+N))_u = 0, \qquad 2H_v = (e^{-2\sigma}(L+N))_v = 0$$

このとき (1) は次のように書き換えられる：

$$\begin{cases} (L-N)_u & = -M_v \\ (L-N)_v & = \quad M_u \end{cases}$$

問題 5-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式，第二基本形式が

$$ds^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}\,du^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}\,dv^2, \qquad II = c\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(du^2 - dv^2)$$

と表されているとする．ただし (ξ, η) は $\mathbb{R}^2$ の座標，$\theta\colon U \to (0, \pi)$ は C^∞-関数，c は正の定数である．

- p のガウス曲率を求めなさい．
- 可積分条件を θ に関する方程式として具体的に記述しなさい．

負定曲率曲面

$$ds^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}\,du^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}\,dv^2, \qquad I\!I = c\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(du^2 - dv^2)$$

- $K = -c^2$
- 可積分条件 $\Leftrightarrow \theta_{uu} - \theta_{vv} = c^2\sin\theta$