幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス・コダッチ方程式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2023/02/02

準測地線と測地線

定義

曲面上の正則曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が

- <u>準測地線</u> $\Leftrightarrow [\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}}$ が $\dot{\gamma}(t)$ と一次従属.
- <u>測地線</u> $\Leftrightarrow [\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$

準測地線と測地線

命題

曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が,

- 測地線ならば，$|\dot{\gamma}(t)|$ は t によらず一定である.
- 準測地線ならば，パラメータを弧長に取り替えれば測地線である.

事実

曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち，長さ最小のものが存在するならばそれは準測地線である.

存在と一意性

命題

曲線 $p(u(t), v(t))$ が測地線 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{u} + \dot{u}^2\Gamma^1_{11} + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma^1_{12} + \dot{v}^2\Gamma^1_{22} & = 0 \\ \ddot{v} + \dot{u}^2\Gamma^2_{11} + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma^2_{12} + \dot{v}^2\Gamma^2_{22} & = 0 \end{cases}$$

事実

曲面 p 上の測地線 $\gamma(t)$ で，$\gamma(0) = p(u_0, v_0)$,
$\dot{\gamma}(0) = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$ となるものがただ一つ存在する．

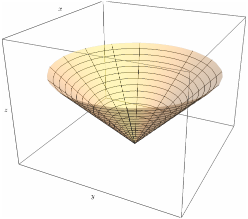
問題 6-1

問題

正の定数 a に対して，円錐面 $p(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r}{a}\right)$ $((r,\theta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi))$ の測地線 $\gamma(t)$ で，次の条件を満たすものを求めなさい：$\gamma(0) = p(1,0)$，$\dot{\gamma}(0) = p_\theta(1,0)$.

円錐面の測地線

$p(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r}{a}\right)$ (問題 4-1)



$$\begin{aligned} p_{rr} &= 0, \\ p_{r\theta} &= \frac{1}{r}p_\theta = [p_{r\theta}]^{\mathrm{T}}, \\ [p_{\theta\theta}]^{\mathrm{T}} &= p_{\theta\theta} - (p_{\theta\theta}\cdot\nu)\nu = -\frac{a^2 r}{1+a^2}p_r. \end{aligned}$$

円錐面

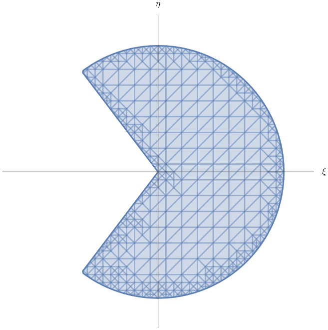
だから $\gamma(t) = p(r(t), \theta(t))$ に対して

$$[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}} = \left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2\frac{a^2 r}{1+a^2}\right)p_r + \left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}\right)p_\theta$$

円錐面の測地線

$$\begin{cases} \ddot{r} - \dot{\theta}^2 \dfrac{a^2 r}{1+a^2} = 0 \\ \ddot{\theta} + \dfrac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} (r(0), \theta(0)) & = (1, 0) \\ (\dot{r}(0), \dot{\theta}(0)) & = (0, 1) \end{cases}$$

円錐面の測地線



$$ds^2 = \frac{1+a^2}{a^2}dr^2 + r^2 d\theta^2$$
$$= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = d\xi^2 + d\eta^2,$$

$$\rho = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}r, \varphi = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\theta$$
$$(\xi, \eta) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$

求める測地線は

$$\xi = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = \rho\cos\varphi, \qquad \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 = 1.$$

問題 6-2

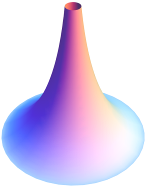
問題

曲面 $p\colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ を
$p(u, v) := (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v)$ で与えるとき，
uv-平面上の曲線 $L_a := \{(u, v)\,;\, u = a, v > 0\}$,
$C_{a,b} := \{(u, v)\,;\, (u - a)^2 + \cosh^2 v = b^2, v > 0\}$ に対応する曲面上の曲線は準測地線であることを示しなさい．ただし $a \in \mathbb{R}$,
$b \in (1, \infty)$ は定数である．

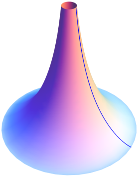
擬球面

擬球面：問題 2-1 の $b=0$ の場合；

$$
\begin{aligned}
p &= \operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_1 + (v - \tanh v)\boldsymbol{e}_2,\\
p_u &= \operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_2,\\
p_v &= \tanh v(-\operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_1 + \tanh v\boldsymbol{e}_3),\\
\nu &= \tanh v\boldsymbol{e}_1 + \tanh v\boldsymbol{e}_3,\\
ds^2 &= \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2
\end{aligned}
$$

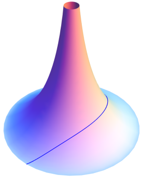


擬球面の測地線 L_a



$$
\begin{aligned}
\gamma(v) &= p(a, v),\\
\dot\gamma(v) &= p_v = \tanh v(-\operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_1 + \tanh v\boldsymbol{e}_3),\\
\ddot\gamma(v) &= p_{vv} = (-\tanh v \operatorname{sech} v)'\boldsymbol{e}_1 + (\tanh v)'\boldsymbol{e}_3,\\
\nu &= \tanh v\boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

擬球面の測地線 $C_{a,b}$

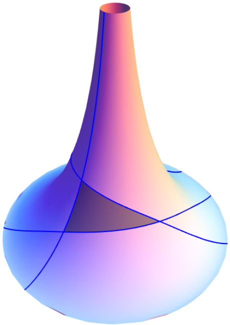


$v = v(u)$ として

$$u - a + \dot{v} \cosh v \sinh v = 0,$$
$$1 + \ddot{v} \cosh v \sinh v + (\dot{v})^2 (\cosh^2 v + \sinh^2 v) = 0$$

$$\begin{aligned}
\gamma(u) &= p(u, v(u)) = \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_1 + (v - \tanh v) \boldsymbol{e}_3 \\
\dot{\gamma}(u) &= -\tanh v \operatorname{sech} v \dot{v} \boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_2 + 2 \tanh v \operatorname{sech}^2 v \boldsymbol{e}_3 \\
\ddot{\gamma}(u) &= (-\ddot{v} \tanh v \operatorname{sech} v - \operatorname{sech} v + \dot{v}^2 (\tanh^2 v - \operatorname{sech}^2 v)) \boldsymbol{e}_1 \\
&\quad - 2\dot{v} \tanh v \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_2 + (\ddot{v} \tanh^2 v + 2\dot{v}^2 \tanh v \operatorname{sech}^2 v) \boldsymbol{e}_3, \\
\nu &= \tanh v \boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}$$

擬球面上の三角形



三角形のガウス・ボンネの定理

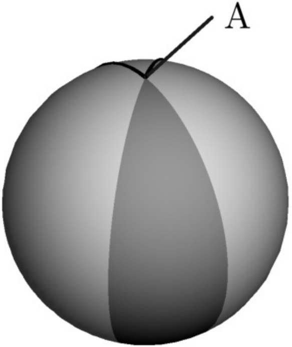
- $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\gamma_1(t)$,$\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$：
- $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \mathrm{B}$, $\gamma_2(1) = \gamma_3(0) = \mathrm{C}$, $\gamma_3(1) = \gamma_1(0) = \mathrm{A}$
- γ_j をつなげて得られるループの内部の閉包 $\Delta\mathrm{ABC}$ が閉円板と同相.
- $\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$,$\angle\mathrm{C}$：測地線が $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{B})$, $p(\mathrm{C})$ において各測地線分が成す角.

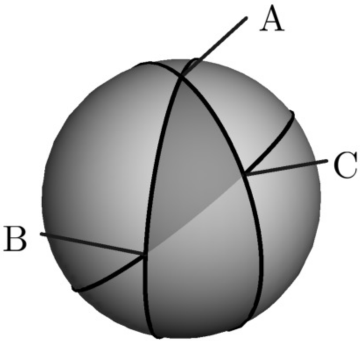
定理 (ガウス・ボンネの定理，テキスト 定理 10.6)

線分 $\hat{\gamma}_j = p \circ \gamma_j$ $(j = 1, 2, 3)$ が測地線であるとき,

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi + \int_{\Delta\mathrm{ABC}} K\, dA \qquad (dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv).$$

例：球面の場合





擬球面

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$$