

2023年2月2日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 7

■お知らせ

- 今回が最終回となります。ご聴講ありがとうございました。
- 学修アンケートにご協力ください。T2SCHOLAより回答できます。
- 定期試験は2月9日木曜日、本館 H114 講義室で実施します。講義が行われている教室と異なるので注意。

■前回の補足 (1月19日分)

- 問題 5-2 の可積分条件 $\theta_{uu} - \theta_{vv} = c^2 \sin \theta$ は、 $\theta(u, v)$ が v のみに依存する場合、単振子の運動方程式 $\theta_{vv} = -c^2 \sin \theta$ となることを指摘した方がありました。実際、この解から、ガウス曲率が負で一定な曲面が構成できます。対応する曲面は回転面で、解の性質からテキスト 247 ページのような 3 つのクラスにわかれます。
- 「可積分条件」とは何が積分できるのか、というご質問が複数ありました。「微分方程式を解く」という操作を微分をほどく、という意味で「積分する」という慣習があります。この講義で扱った可積分条件は、枠 \mathcal{F} が満たす式 $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$ を \mathcal{F} を未知関数とする偏微分方程式系とみなしたとき、それが解をもつための必要条件。
- 特別な場合に、第三基本形式 $III = dv \cdot dv$ が満たす性質 $\widehat{III} = 2H\widehat{II} - K\widehat{I}$ を示した方がいらっしゃいます。一般に成り立つか、というご質問ですが、ワインガルテン行列 A に対するケイリー・ハミルトンの等式 $A^2 - 2HA + KI = O$ (I は単位行列) から導くことができます。

■前回の補足 (1月26日分)

- 測地線の方程式を「長さ最小」から導き出してくださった方がありました。基点の曲線のパラメータを弧長にとり、長さの変分が消えることを書き直す (オイラー・ラグランジュ方程式) と、測地線の方程式が得られます。

■前回までの訂正 (1月19日分)

- 20230119 映写資料 B, 5 ページ: $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ からの式変形のうち、 $(\eta_r dr + \eta_\theta d\theta)^2$ の前の等号を削除。
- 講義資料 5, 3 ページ, 式 (5.3): $\mathcal{F}_v = F\Lambda \Rightarrow \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$

■授業に関する御意見 (1月19日分)

- tex うちの手間がどんどんすまじくなっています... 山田のコメント: そう? ちなみに tex でなく TeX.
- この問題, 計算ミス 4 回位して (重大なミス) 6 時間以上かかってしまいました。おかしいと思った時は 9 割以上, 最初のほうで定義の勘違いやケアレスミスをしているのですが, 気づけなくて困ります。(自分ではあっていると思っているから厄介)
山田のコメント: そうですね。間違いはたいいてい最初の方。
- 過去最高に計算が面倒でした。山田のコメント: そう?
- 課題が難しくなっているような気がします。理解が追いついていないのでテストまでに何とかしたいです。
山田のコメント: なんとかしましょう。
- 計算が大変でした。しかし一周回ってなぜだかストレス解消になったような気がします。
山田のコメント: わかる。スポーツみたいなものですかね。
- ないです 山田のコメント: はい。

■授業に関する御意見 (1月26日分)

- 後期の間ありがとうございました。現時点では幾何って意外と微分方程式多いなという感想を持っています。
山田のコメント: そうですね。
- 試験の満点はいくつでしょうか。山田のコメント: 未定。
- 当たり前ですが, やはり講義を聞く前に課題に挑むのは難しいですね。後半になってからはそれをより強く実感しました。
山田のコメント: はい, そういうつもりで出題するようにしました。
- 今回のレポート問題, たくさん時間をかけたけど解けませんでした。悲しいです。山田のコメント: 私もかなしい。
- (ii) の計算があわなくてだいぶてこずりました。テスト当日も同じようなことが起こりそうで心配です。
山田のコメント: まあ, そういうものですよ。
- 曲面論難しい!! 山田のコメント: 雑多なことを紹介しすぎたかもしれませんね。
- Wikipedia で「東工大理学院」なる記事を発見したのですが, 見てみると現在の学院長は山田先生であると書いてありました。
山田のコメント: なるほど。
- ないです 山田のコメント: me, too.

■質問と回答 (1月19日分)

質問 1: クリストッフェル記号は第一基本量とその導関数で決まる. \Rightarrow 第一基本量と関係する曲線の長さや曲面の面積とクリストッフェル記号は関係があるのか? \Rightarrow 調べると曲面上において2点を結ぶ最短線である「測地線」と関係がある \Rightarrow 測地線は $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ の曲線上で, 曲面に接するベクトルである $[\dot{\gamma}(t)]^T = 0$ が条件より, クリストッフェル記号で測地線の条件が書ける. 測地線以外にもクリストッフェル記号を用いて計算するものはあるのか. **お答え:** ガウス曲率も (今回少し説明します).

質問 2: フルネ枠のときは e, n, b を単位ベクトルに定義していました. 一方でガウス枠では p_u, p_v はそのまま使われているのですが, こだわらないのは平面と曲面のどこの差によるものでしょうか.

お答え: 「正規直交枠」を用いて曲面論の基本定理を定式化することもできます. テキスト第 III 章参照. 曲面の場合の問題は, 一般に (p_u, p_v, ν) が正規直交系をなすようなパラメータ (u, v) が存在しないことです.

質問 3: 可積分条件はパラメータによらず成立しますか? **お答え:** はい. ちょっと記述が面倒ですが.

質問 4: 可積分条件を満たすと図形としてどう特徴づけられるのでしょうか.

お答え: 図形 (曲面) が存在するなら可積分条件は自動的に満たされる.

質問 5: 曲面論の基本定理において, $E, G, EF - G^2$ (山田注: $EG - F^2$ のこと?) のうち2つが正でほかが負など不等号の条件をかえた場合も主張が成り立つのでしょうか.

お答え: どういう「主張」を想像していますか? \mathbb{R}^3 の曲面については自動的に $E, G, EG - F^2$ が正になりますので「 \mathbb{R}^3 の曲面が存在する」という主張にはできませんね. 行き先を \mathbb{R}^3 から別の空間に変える (たとえばローレンツ・ミンコフスキー空間 (ここでは定義しない)) にすると意味をもつこともあります.

質問 6: 曲面論の基本定理で $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$ を仮定するのは曲面を一意的に決定するための条件なのですか. それとも曲面の存在を示すのに必要なおでしょうか.

お答え: 曲面が存在すれば, 自動的にこの式を満たしますから, 存在のための必要条件であることがわかりますね.

質問 7: 可積分条件 (と他の細かい仮定) さえ満たされていれば微分方程式が解けるというのはどうしてわかるのでしょうか. 他の条件があるかもしれないと思うのですが...

お答え: 「解ける」という定理が証明できるから (当たり前). テキスト 259 ページ, 定理 B-9.4.

質問 8: 可積分条件は6つの第一, 第二基本量に対して9つの式ができると思うのですが, すると曲面が与えられたとき, 微分方程式を解けば第一基本量が第二基本量 (あるいはその逆) で表せるということになりませんか?

お答え: そうはうまくいきません. 例えば問題 4-2 参照. 可積分条件のうち独立なものは3本です.

質問 9: 曲面論の基本定理では定義域が単連結領域であることを仮定していました. 解析学概論の授業で, 単連結領域上で渦なしのベクトル場はスカラーポテンシャルを持つことを習いましたが, これと何か関係ありますか? (証明に使えたり, 2つの証明方法が類似しているなど.)

お答え: 本質的に同じ理由による. 領域の1点 P を一つ固定するとき, それ以外の点 Q でのポテンシャル/フレームの値を決めるには, P から Q に向かう道にそって積分する/微分方程式を解く. これが P, Q を結ぶ道によらないことを示すのに, 道の変形をもちいる. 始点, 終点を共有する2つの道の間の変形の存在が単連結性.

質問 10: 映写資料 C の等温座標系のところで, $E = e^\sigma$ (山田注: ここでは $e^{2\sigma}$ とした) として考えていることには何か意味があるのですか. 単に E としておいたほうが一般的だと思いますが, 指数関数の形になっているというのはそれほど情報として大きいのでしょうか. **お答え:** $E > 0$ なので $E = e^{2\sigma}$ となる σ は存在するので情報量は変わらない. この形を使うとクリストッフェル記号が簡単になる. たとえば $\Gamma_{11}^1 = \sigma_u$.

質問 11: 5-1 では $K = -e^{-2\sigma} \Delta \sigma$ とガウス曲率が第一基本量のみで表すことができましたが, これは特別にこうなっているだけですか? それともガウス曲率は常に第一基本量のみで表すことができるのですか?

お答え: K は E, F, G (とその2階までの偏導関数) で表せます (驚異の定理). 今回少し言及します.

質問 12: 問題 5-1 において (山田注: 可積分条件の3行目, 3列目の成分) $= 0$ は用いましたが (山田注: (1, 2)-成分) $= 0$ は使いませんでした. これを使うと $\Delta \sigma = -e^{-2\sigma} (LN - M^2)$ (中略) $K = e^{-2\sigma} \Delta \sigma$ となりますが, こうして求めた K に特別な性質等がありますか? **お答え:** ガウス曲率の性質以上に特別なものはないはず.

質問 13: 問題 5-1 より, 平均曲率一定ということは結構強い条件なのだと思います. M と $L - N$ が調和関数なので, 例えば考えている領域が有界で滑らかな境界を持ち M と $L - N$ が適当な境界条件を満たせば (境界上 0 など), $M = L - N = 0$ となり, Weingarten 行列の形を考えるとすべての点は臍点であることが言え, 平面または球面の一部であることが言えると思います. 一般に, 平均曲率が一定の曲面 (または極小曲面) は $\bigcirc\bigcirc$ しかないということは言えるのでしょうか.

お答え： 平均曲率一定の閉曲面で球面に同相なものは、全臍的である (H. Hopf). テキスト §16 に証明がある. そこでは Poincaré-Hopf の指数定理を用いているが, $q = (L - N) - 2iM$ が $z = u + iv$ の (複素関数としての) 正則関数であることと Liouville の定理を用いて全臍的であることを (ご質問のような筋道ですね) 示すこともできる. 一方, 自己交叉を持たない閉曲面で平均曲率一定なものはやはり全臍的である (A. D. Alexandrov). この「球面と同相」や「自己交叉を持たない」という仮定を外せるか, といういわゆるホップの問題は, 平均曲率一定トーラス (テキスト 67 ページの図) が H. Wente によって構成されたことにより, 1980 年代前半に決着がついた.

質問 14： 問題 5-1 に関連する質問ですが, 曲面が調和関数を成分に持つというのはどういった幾何学的意味を持っているのですか. **お答え：** 極小曲面.

質問 15： 教科書 p 262 の式 (B-9.13) で $p_v = {}^t(F_0, \delta_0, 0)$ となっていますが, 第一成分, 第二成分がどうしてそうなるのか教えていただけないでしょうか. **お答え：** 点 (u_0, v_0) での値ですね. $p_u = {}^t(\sqrt{E_0}, 0, 0)$, $\nu = {}^t(0, 0, 1)$, $p_v \cdot \nu = 0$, $p_u \cdot p_v = F_0$, $p_v \cdot p_v = G_0$ を成分で書き下せばわかる.

質問 16： 第二基本行列にマイナスがついているのはなぜなのでしょう.

お答え： 講義では何回か「習慣による. マイナスをつけない流儀もある」ことを述べています. この講義ではガウスの公式 $p_{uu} = \dots$ の ν の係数が第二基本量となるように符号を決めています.

質問 17： 主法線と主曲率の $\hat{\Pi} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \hat{I} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ の部分の導き方がわかりませんでした. **お答え：** 主法線?

■質問と回答 (1月19日分)

質問 18： $[v]^N = (v \cdot \nu(u_0, v_0))\nu(u_0, v_0)$ はわかりましたが, $[v]^T$ の具体的表示はあるのでしょうか.

お答え： $v - [v]^N$.

質問 19： 測地線とは図形的にどのようなものなのでしょう. 曲面によっては計算せずにだいたいの概形 (原文ママ) がわかることがあるのでしょうか. **お答え：** 前半: 加速度が曲面の法線方向を向く曲線 (十分図形的だと思う). 後半: 問題 6-1 はできますね. 一般には無理.

質問 20： 例 6.8 について, 曲面上にのっている直線が存在して, 測地線でないものの例として, どんなものがありますか. **お答え：** よく読んでください. そういうものがない, と断言していませんか?

質問 21： 測地線により曲面の特徴がわかるのではないかと ⇒ 曲線において曲率があるように測地線においても曲率を考えればよい? ⇒ ガウス曲率と測地線は第一基本量によってのみ表せるが, お互いどのような関係があるか. ⇒ 2 式の関係式はさすがに書けなさそう? そのためにクリストッフェル記号があるのかな. **お答え：** 測地線の曲率は空間曲線としての曲率を考えれば良い? ガウス曲率との関係は例えばガウス・ボンネ. 測地円板の面積も関係ある. 測地線とガウス曲率は見てる幅 (曲線 vs 曲面上の領域) が違うが, 関係を表すには何を見ればよいか.

質問 22： 準測地線 $\Leftrightarrow \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \nu) = 0$ というのは, 下のような理由によるものでよいですか? 準測地線 $\Leftrightarrow [\ddot{\gamma}]^T$ と $\dot{\gamma}$ が一次従属 $\Leftrightarrow \ddot{\gamma} \in \text{Span}\{\dot{\gamma}, \nu\} \Leftrightarrow (\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \nu)$ が一次従属 $\Leftrightarrow \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \nu) = 0$. **お答え：** はい.

質問 23： 曲線 γ が準測地 (原文ママ: 準測地線) となるための必要十分条件が $\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \nu) = 0$ となるのはなぜですか. **お答え：** 上の質問と回答.

質問 24： 測地線と解析力学における最小作用の原理が近いものだと感じました. 関係性があれば教えていただきたいです. また, 関係性があるとしたとき, オイラーラグランジュ方程式およびハミルトン方程式は測地線における何を表しますか. **お答え：** はい, 作用積分として弧長をとったときの最小作用の原理です. 起点となる曲線が弧長でパラメータづけられていればオイラー・ラグランジュは “測地的曲率” = 0.

質問 25： 準測地線が二点間の最小経路であるということと $[\ddot{\gamma}]^T$ が $\dot{\gamma}$ と一次従属であるということがどうしても結びつきません. 授業中の映写資料 B での「寄り道をしない」ということと一次従属であることの繋がりの説明をもう一度お願いしたいです. **お答え：** ここでは証明はしていない. 「曲がらない」とは加速度が速度と平行.

質問 26： 曲面上の二点に対して最短線が存在するための必要十分条件はわかっていたりするのでしょうか.

お答え： 曲面が完備であること. 定義は「測地線がどこまでも伸ばせる». 同値な言い換えは Hopf-Rinow の定理.

質問 27： 曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち長さ最小のものが存在するならば準測地線であるとありますが, 曲面上の 2 点を結ぶ曲線は存在するが長さ最小のものが存在しない場合があるのでしょうか.

お答え： 講義で説明したと思うが平面から 1 点を除いたものが例.

質問 28： 考えている領域が単連結ならば任意の 2 点に対して測地線が存在しますか?

お答え： いいえ. 平面の凸でない領域を考えてみましょう.

質問 29： ガウス・ボンネの定理において, $\angle A + \angle B + \angle C = t$ (t は定数) が任意の測地線 (原文ママ: 測地三角形のこと) で成り立つとき p は決定できるのでしょうか.

お答え： 非自明ですが、このとき曲面のガウス曲率は 0 , $t = \pi$ となります。ガウス曲率が 0 であるような曲面は一つに決まりますか？

質問 30： ガウス・ボンネの定理から導かれる値は、曲面の凹凸の一つの表現といえると思いますが、逆に三角形の内角の和から曲面の曲率を求めることはありますか？

お答え： 原理的にはできます。この世界が曲がっているかどうかを確かめようとして三角測量を行ったのがガウス。

質問 31： 1枚の紙（平面）を貼り合わせてできる曲面には、紙の状態で書いた曲線に対応して、曲面上の曲線ができませんが、これがかならず準測地線になりますか。

お答え： 一般の曲線ならなりません。紙に書いた直線、曲面は紙を伸び縮みしないように曲げたもの、なら正しい。

質問 32： 問題 6-1 を後からよく見ると問題 4-1 の結果を使わず直接微分方程式を解く方法でも解けそうだったのですが、途中に出てくる $\ddot{r} = \frac{c}{r^3}$ という方程式を天下りの的でなく自然な発想で解く方法はあるのでしょうか。

お答え： 1次元の運動に対する、保存力のもとでの運動方程式とみなせるのでエネルギー積分を考えれば良い。

質問 33： 問題 6-2 に取り組んでみたのですが、 $\det(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \nu)$ を素朴に計算しようとする計算量が大変なことになって今のところ断念しています。実は何かいい方法があるのでしょうか。

お答え： $e_1 = {}^t(\cos u, \sin u, 0)$ などを使う。

質問 34： 6-2 は双曲幾何に関する問題だと思うのですが、 $C_{a,b}$ がなぜこのような形なのか分かりませんでした（計算も合わなかった）。非ユークリッド幾何を見つけた人たちもこのようにして測地線を見つけたのでしょうか。それとも初めは形式的議論（座標を用いないような？）で見つけた後、ユークリッド空間内に実現したのでしょうか？この例が見つかるまで 1000 年以上（2000 年以上）かかった理由も気になります。

お答え： 一番目：たぶん違う。二番目：おおよそそうらしい。ユークリッド空間への実現は局所的。三番目：ねえ。

質問 35： 球面 S 上に三角形 A があるとき $S - A$ も三角形ですか。 **お答え：** はい。

質問 36： 曲面上の角度はどのように定義されますか。また 2次元多様体上ではそもそも角度を定義できるのでしょうか。

お答え： 前半：互いに交わる 2つの曲線の接ベクトルが成す角。後半：リーマン計量があれば定義できる。

質問 37： 存在と一意性のスライドで $\dot{\gamma} =$ の 2行目への式変形がわかりませんでした。

お答え： (1) 場所が特定できない。「存在と一意性」というタイトルのスライドは 2枚ある。 $\dot{\gamma} =$ の後の板書は 1行しかないと思われる。(2) わかりませんでした、として何を聞いているのでしょうか。

7 ガウス・コダッチ方程式

ここでは断りのない限り $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を \mathbb{R}^2 の領域 U で定義された C^∞ -級正則曲面, ν を p の単位法ベクトル場, $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ を第一基本形式, $II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$ を第二基本形式とする.

■フルネ枠と可積分条件 (復習) 行列値関数 $\mathcal{F} = (p_u, p_v, \nu): U \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{R})$ をガウス枠と呼ぶ.

定理 7.1 (ガウス・ワインガルテンの公式). 曲面 $p = p(u, v)$ のガウス枠 \mathcal{F} は次を満たす:

$$(7.1) \quad \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda, \quad \left(\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{ただし} \quad \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 (= \Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 (= \Gamma_{21}^2) & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \hat{I}^{-1} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

命題 7.2 (可積分条件). 式 (7.1) で定義された Ω, Λ は次を満たす:

$$(7.2) \quad \Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O.$$

■ガウス方程式・コダッチ方程式 行列値関数 Ω, Λ の各成分は E, F, G とその 1 階までの偏導関数および L, M, N で表されるから, (7.2) は E, F, G とその 2 階までの偏導関数および L, M, N とその 1 階までの偏導関数の 9 本の等式だが, 問題 5-1 の例のように独立な等式は 3 本となる.

そのうち, E, F, G の 2 階偏導関数を含む 1 本をガウス方程式, 残りの 2 本をコダッチ方程式という.

ガウス方程式は一般に テキスト 111 ページ (10.10) 式 の形をしている. このことから

事実 7.3. 曲面のガウス曲率 K は, 第一基本量 E, F, G とその 2 階までの偏導関数で表すことができる.

ことがわかる. これをガウスの驚異の定理という. このことから“正確な地図は存在しない”ことが次のようにしてわかる:

- 球面上の領域がパラメータ (u, v) で表示されているとして, 第一基本量を ds^2 とする. 正確な地図 (uv -平面上の曲線の長さが球面上の対応する曲線の長さ一致する) から, $ds^2 = du^2 + dv^2$.
- $ds^2 = du^2 + dv^2$ ならガウス曲率は 0 でなければならない. 一方, 球面のガウス曲率は正の定数である.

■三角形のガウス・ボンネの定理 正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して U 上の曲線 $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) が $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = B, \gamma_2(1) = \gamma_3(0) = C, \gamma_3(1) = \gamma_1(0) = A$ を満たし, これらをつなげて得られるループの内部の閉包が閉円板と同相な閉領域 ΔABC であるとする. A, B, C で出会う曲線分が成す角をそれぞれ $\angle A, \angle B, \angle C$ と書くと,

定理 7.4 (ガウス・ボンネの定理, テキスト 定理 10.6). 線分 $\hat{\gamma}_j = p \circ \gamma_j$ ($j = 1, 2, 3$) が測地線であるとき,

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \int_{\Delta ABC} K dA \quad (dA = \sqrt{EG - F^2} du dv).$$

■2次元多様体と曲面

定義 7.5. 2次元(可微分)多様体とは, 第二可算公理を満たすハウスドルフ空間 S と, S の開集合族 $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$, 各 U_α から \mathbb{R}^2 への連続な単射 $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2; \alpha \in A\}$ の組 $(S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ で次を満たすものである: (1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = S$, (2) φ_α は U_α から $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ への同相写像 (3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ なら $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は微分同相写像.

「大域的な(正則)曲面」とは, 2次元可微分多様体 $S = (S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ から \mathbb{R}^3 への写像 $p: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ で, 各 α に対して $p \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^3$ が正則曲面を与えているものとする.

今回まで扱った正則曲面のさまざまな不変量はパラメータのとり方によらないので, 大域的な曲面の不変量とみなすことができる.

定義 7.6. 2次元可微分多様体 $(S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ が向き付けられた多様体である, とは各 α, β に対して, \mathbb{R}^2 の開集合間の微分同相写像 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ の Jacobi 行列式が常に正となるものである.

定理 7.7 (大域的なガウス・ボンネの定理 (テキスト, 定理 10.7)). コンパクトで向き付けられた2次元多様体 S 上で定義された大域的な正則曲面 $p: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$$

が成り立つ. ただし K, dA はそれぞれ曲面のガウス曲率, 面積要素, $\chi(S)$ は S のオイラー数, g は閉曲面 S の種数である (テキスト §10 参照).