

April 26, 2022  
Kotaro Yamada  
kotaro@math.titech.ac.jp

## Info. Sheet 2; Advanced Topics in Geometry E (MTH.B501)

### Informations

- Eight homeworks were submitted. The feedback will be found on T2SCHOLA.
- Although next Tuesday (May 3rd) is a holiday, the deadline of the homeworks is April 26, as usual.

### Corrections

- Lecture note, page 1, line 9: unknown  $\Rightarrow$  **unknown**
- Lecture note, page 1, line 9:  $\mathbf{x}: J \rightarrow U \Rightarrow \mathbf{x}: I \rightarrow U$
- Lecture note, page 1, line 9: **solutoin**  $\Rightarrow$  **solution**
- Lecture note, page 1, the first line of Fact 1.1: as in (2.1)  $\Rightarrow$  as in (1.1)
- Lecture note, page 1, line 14: solutoin  $\Rightarrow$  **solution**
- Lecture note, page 1, line 14: extension  $\Rightarrow$  **extensions** (plural).
- Lecture note, page 2, line 2: (2.1)  $\Rightarrow$  (1.1)
- Lecture note, page 2, line 10:  $\Omega$  and  $\Lambda \Rightarrow \Omega$  and  $B$
- Lecture note, page 2, line 18:  $n \times n$  matrix  $\Rightarrow$   $n \times n$ -**matrices** (plural)
- Lecture note, page 4, line 1: If  $\text{tr } \Omega(t)$  is identically zero in (1.7),  
 $\Rightarrow$  **If  $\Omega(t)$  in (1.7) satisfies  $\text{tr } \Omega(t) = 0$ ,**
- Lecture note, page 4, line 13: For any fixed number  $k$   
 $\Rightarrow$  For any **positive** number  $k$
- Lecture note, page 8, line 6: parametrized the arc-length  $\Rightarrow$  parametrized **by** the arc-length  $\Rightarrow$

### Students' comments

- よろしくお願ひします。 **Lecturer's comment** こちらこそ
- 曲面論の内容をほぼ忘れてしまったので復習します。 **Lecturer's comment** 復習？
- ムンクの叫びの人形？ で、全く同じ物をどこかで見た記憶があります。(どこかは思い出せません) **Lecturer's comment** 「水曜どうでしょう」には出ていたらしいです (TV を持っていないので知らない)

## Q and A

- Q 1:** Maximal solution を考えるときは  $t = 0$  を含む区間に限るという解釈でよいのでしょうか。たとえば  $dx/dt = 1/(1+x^2)$  (山田注: 多分  $dx/dt = 1+x^2$ ) の例では  $x = \tan t$  ( $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ ) としていましたが,  $t \neq \pi/2 + n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) である実数すべてで考えることはしない (できない) のでしょうか。
- A:** 我々の文脈ではやらない. 与えられた初期値に対する解の一意性が保証されなくなるので.
- Q 2:** 行列値関数の微分方程式では, いわゆる “係数” となる  $\Omega(t)$  が  $X(t)$  の右側に置かれていますが, 左から掛けた場合でも同様の議論になるのでしょうか?
- A:** はい. ここでは後で使う形 (Frenet-Serret など) にあわせて右に書いています.
- Q 3:** 空間曲線の基本定理における Frenet Frame の  $\mathcal{F}(e, n, b)$  の並びにはなにか蓋然性があるのでしょうか. つまりこの並びのときだけ  $d\mathcal{F}/ds = \mathcal{F}\Omega$  の  $\Omega$  が skew-symmetric な matrix になるわけですが, そこに意味づけなどはあったりしますか?
- A:**  $(e, n, b)$  をどの順番にならべて  $\mathcal{F}$  を作っても  $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$  は交代行列になります. この並びは定義された順番ですね.
- Q 4:** 今回の主題は曲面の基本定理ですが, 立体すなわち 3 次元 Ver などは考えられているのでしょうか? (おそらくかなり煩雑と予想します)
- A:** 超曲面の基本定理. うまく記述すればそれほど煩雑ではない.
- Q 5:** 講義資料 P4 の (1.9) でのノルムで一様ノルム  $C^0(I, M_n(\mathbb{R}))$  の位相は変化しませんか?
- A:**  $I$  が有界な閉区間であれば一様ノルムと同値.
- Q 6:** 交代行列の英語 skew symmetric の “skey” は直訳では斜め, ゆがみだと思うが, なぜ交代行列に skew が使われるのか気になった.
- A:** なるほど. 直訳の「歪対称 (わいたいしょう) 行列」もよく使いますね.
- Q 7:** 1, 2Q 通じてこの講義で扱う内容はトポロジーとの関連性は低いでしょうか.
- A:** 低いかもしれませんが. 2Q には「定曲率空間の局所一意性」を示したいと思いますが, 関連するともしないとも言えますね.