

# Advanced Topics in Geometry E (MTH.B501)

Kotaro Yamada

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-e/`

Tokyo Institute of Technology

2022/05/17

# Notice

- ▶ Twelve homeworks were submitted. The feedback will be found on T2SCHOLA.

# Q and A

Q:  $A_i^j, g_{ij}, g^{ij}, \Gamma_{ij}^k$  はどのような基準でそえ字が上か下かは決まりますか.

covariant component 共変  
contravariant component 反変

coordinates:  $u^1 u^2$  superscript

$P_{,j} = \frac{\partial P}{\partial u^j}$  : subscript

(omit "Σ")

Einstein's convention

$g_{ij} = P_{(i} \cdot P_{j)}$  : subscripts.

$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$

$\sum_k g^{ik} g_{kl} = \delta_{il}$

(P<sub>,i,j</sub>)

$P_{,ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k P_{,k} + P_{(j} P_{i)}$

## Q and A

Q: 別の Riemann 幾何の本をよんでいるときに,  
Christoffel's symbol は Riemann connection の係数として  
あられていたのですが,

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ という形}\right), \text{ これは}$$

$p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $U \subset \mathbb{R}^2$ ) を曲面の方程式としたとき,  
 $\mathbb{R}^3$  の標準的な計量  $g_0$  と  $p$  から  $U$  に計量をつくら  
て, そこから定まる  $U$  の Riemannian connection の  
係数が講義での Christoffel's symbol ということ  
ですか?

2Q

Q: クリストッフエル記号の使い方を見ると, 曲面上  
の各点での 2 回微分  $p_{,ij}$  をガウス枠で成分表示した  
ときの説ベクトルの方の成分になるように都合よく  
定義されるように見えました. より高次元の空間の  
“超曲面” を考えるときも同様にクリストッフエル記  
号を定義づけするのでしょうか.

# Q and A

Q: 第一基本形式は長さや角度の情報をもつと仰っていましたが、一方で、第二基本形式にはどのような意味合いがあるのでしょうか。

A: 平面からの離れ具合.  $f(x, y)$  を  $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  を満たす関数とし、  
 $p(x, y) = (x, y, f(x, y))$  をそのグラフとするとき、  
 (原点における第二基本行列はそのヘッセ行列と一致する。



a graph tangent to the  $xy$ -plane at the origin

$$\nu(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ at } (0,0) \quad \begin{matrix} L & M \\ \underbrace{f_{xx}} & \underbrace{f_{xy}} \\ \underbrace{f_{yx}} & \underbrace{f_{yy}} \end{matrix}$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} p_{xx} \cdot \nu & p_{xy} \cdot \nu \\ p_{yx} \cdot \nu & p_{yy} \cdot \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (L x^2 + 2M xy + N y^2) + \text{higher order}$$

## Q and A

Q: 「曲線と曲面」でもこの講義でも曲面を表す写像の記号として  $f$  や  $x$  ではなく “ $p$ ” を選んでいるのには何か意味がありますか.

A: “point” の意味. 点の座標だから. この講義では「曲線と曲面」の記号に合わせた

- 小野昭七  
曲線と曲面の組合せ