May 10, 2022
Kotaro Yamada
kotaro@math.titech.ac.jp

Info. Sheet 3; Advanced Topics in Geometry E (MTH.B501)

Informations

- Twelve homeworks were submitetd. The feedback will be found on T2SCHOLA.

Corrections

- Lecture note, page 15, line 9:
$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \qquad d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2$$
$$\Rightarrow \qquad |\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \qquad d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$$
- Lecture note, page 15, line 14: *where* (3) *the set* $\Rightarrow$ *where* (3) *is the set*
- Lecture note, page 16, line 4: $-d\nu\cdot dp == L\,du^2\dots \Rightarrow -d\nu\cdot dp{=}L\,du^2\dots \Rightarrow$
- Lecture note, page 16, line 21: H are define as $\Rightarrow$ H are defined as
- Lecture note, page 16, line -4: $f_{,1} = \frac{\partial}{\partial u^1}$, $f_{,2} = \frac{\partial}{\partial u^2} \Rightarrow f_{,1} = \frac{\partial f}{\partial u^1}$, $f_{,2} = \frac{\partial f}{\partial u^2} \Rightarrow$
- Lecture note, page 17, line -9: the equation (3.8) $\Rightarrow$ the equation (3.17)
- Lecture note, page 18, line 7: $g_{,ij,k} \Rightarrow g_{ij,k}$ (2 times); $g_{jk,,i} \Rightarrow g_{jk,i}$
- Lecture note, page 18, lines 8, 9, 12: $g_{kj,,i} \Rightarrow g_{kj,i}$ (3 times)
- Lecture note, page 18, line -6: For later us $\Rightarrow$ For later use
- Lecture note, page 19, line 12: $\det \widehat{I}\,\widehat{I}^{-1} \Rightarrow (\det \widehat{I}\,)\widehat{I}^{-1}$
- Lecture note, page 20, line 7: *satisfying* (6.5) $\Rightarrow$ *satisfying* (3.26)
- Lecture note, page 21, line 12:
$$\widehat{II} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{II} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v)$$
- Blackboard (20220510-C-bb.pdf), page 4 (of the pdf file): linear compination $\Rightarrow$ linear combination

Students' comments

- 計算が大変でした.

  Lecturer's comment そう思います.

- 今はまだポカポカで良い感じなのですが，これから夏がやってくるかと思うとゆうつです.

  Lecturer's comment 夏の悪口ならいくらでも言えます.

- 山田先生は生活リズムが崩れたときはどのように元に戻しておりますか．院生生活が始まったばかりなのに既に崩れてしまいました.

  Lecturer's comment 老人なので崩すとあとが大変になります．なるべく生活を崩さないようにしています．が，数学・非数学のタスクを抱えて（頭が止まらず）夜床に入っても眠れないこともしばしばあります．そういうときはしようがないので昼寝します．まあ，ご家族がいれば崩れないかもしれませんね.

- 講義に関係ない質問なのですが，先生方は GW 期間中は何をして過ごすのですか.

  Lecturer's comment 今年は，月曜日と金曜日に線形代数の授業があって，あまり休みがあった気がしません．休みの隙間に授業があると休み中に準備をする必要がある，ってバグですよね．今年の GW は劇場にいったり（新国立劇場），配信を見たり（歌舞伎座），計算をしたり，楽器の練習をしたり....

Q and A

Q 1: $\Gamma_{ik}^{l}=\Gamma_{ki}^{l}$ は成り立ちますか.

A: 式 (3.20).

Q 2: A_i^j, g_{ij}, g^{ij}, Γ_{ij}^k はどのような基準でそえ字が上か下かは決まりますか.

A: 共変成分 covariant components 反変成分 contravariant components という言葉に関係しますが，講義で少しコメントします.

Q 3: 別の Riemann 幾何の本をよんでいるときに, Christoffel's symbol は Riemann connection の係数としてあられていたのですが, ($\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^n\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ という形), これは $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ ($U\subset\mathbb{R}^2$) を曲面の方程式としたとき，$\mathbb{R}^3$ の標準的な計量 g_0 と p から U に計量をつくれて，そこから定まる U の Rimannian connection の係数が講義での Christoffel's symbol ということですか？（ものの本には書いてそうですが，いま手元の本にはなかったので…）

A: はめ込み $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ によって $\mathbb{R}^3$ の標準計量 g_0 を「引き戻して」得られる U 上のリーマン計量とはは p の第一基本形式 ds^2 のこと．これにより (U,ds^2) は 2 次元リーマン多様体になるが，そのリーマン接続の係数が Christoffel's symbols になります（ここでは示しませんが).

Q 4: クリストッフェル記号の使われ方を見ると，曲面上の各点での 2 回微分 $p_{,ij}$ をガウス枠で成分表示したときの説ベクトルの方の成分になるように都合よく定義されるように見えました．より高次元の空間の “超曲面” を考えるときも同様にクリストッフェル記号を定義づけするのでしょうか.

A: はい．高次元のリーマン多様体でも定義できます.

Q 5: 2 次元リーマン多様体の各点において，次は正しいでしょうか．ガウス曲率 = 断面曲率 = $\frac{1}{2}$(スカラー曲率)

A: ガウス曲率は，リーマン計量から決まるガウス曲率（講義ノート §4 の K_{ds^2}）という意味で正しいです.

Q 6: 「曲線と曲面」でもこの講義でも曲面を表す写像の記号として f や $\boldsymbol{x}$ ではなく “p” を選んでいるのには何か意味がありますか.

A: “point” の意味．点の座標だから．この講義では「曲線と曲面」の記号に合わせた.

Q 7: 第一基本形式は長さや角度の情報をもつと仰っていましたが，一方で，第二基本形式にはどのような意味合いがあるのでしょうか.

A: 平面からの離れ具合．$f(x,y)$ を $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)$ を満たす関数とし，$p(x,y)=(x,y,f(x,y))$ をそのグラフとするとき，原点における第二基本行列はそのヘッセ行列と一致する.

Q 8: $(U;(u,v))$ が等温座標系であるとき，du^2, dv^2 の係数として λ や e^σ ではなく $e^{2\sigma}$ としているのは U 上の枠 $\{\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\}$ を正規直交化するときなどにルートがなくなるからですか.

A: クリストッフェル記号に余計な係数がつかない.

Q 9: p を i 成分で偏微分し，j 成分で偏微分したものは「$p_{,ij}$」と書くのですね.「$p_{,i,j}$」なのかと推測してしまいました.

A: $p_{,i,j}$ の方が正確かも知れません．記号が煩雑になるので一つ “,” を省きました.

Q 10: Lecture note, page 15, line 19: the uv-plane $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}^2$ の前に “of” が必要とのご指摘がありましたが，“the uv-plane” は “$\mathbb{R}^2$” と同じもの，という意味です.