Advanced Topics in Geometry E (MTH.B501)

Kotaro Yamada
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-e/

Tokyo Institute of Technology

2022/05/24

Notice

- Eleven homeworks were submitetd. The feedback will be found on T2SCHOLA.

Q and A

$\boxed{\det A = \dfrac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}}$

sectional curvature

Q: (4.5) の K_{ds^2} は "intrinsic Gaussian curvature" となっているが通常の Gaussian curvature との違いがイマイチよくわからない.

いまひとつ

どこまではわかっているか明示？

Q: 可積分条件の 1 つのガウス方程式で「断面曲率」という言葉が出ましたが，別々に定められた「ガウス曲率」と「断面曲率」が互いに等しいという風にガウス方程式をとらえるべきなんでしょうか.「可積分条件が成り立たない図形（？）を扱う（扱うことがあるかも分かりませんが）ときは，ガウス曲率と断面曲率を分けて考える意味はありそうですか.」

「同じ」であることは定理

(undefined)

Riemannian manifold

(M^2, ds^2)

Riemannian metric (g_{ij})

K_{ds^2}

manifold 多様体

Q and A

Q: (4.5) の K_{ds^2} は “intrinsic Gaussian curvature” となっているが通常の Gaussian curvature との違いがイマイチよくわからない.

Q: 可積分条件の 1 つのガウス方程式で「断面曲率」という言葉が出ましたが，別々に定められた「ガウス曲率」と「断面曲率」が互いに等しいという風にガウス方程式をとらえるべきなんでしょうか．可積分条件が成り立たない図形（？）を扱う（扱うことがあるかも分かりませんが）ときは，ガウス曲率と断面曲率を分けて考える意味はありそうですか.

Q and A

Q: Remark 4.5 について，Weingarten 行列の行列式を外的曲率とよぶ，ということを山田先生の 2017 年の講義資料で見かけました．Gauss の方程式では内的ガウス曲率と外的ガウス曲率が一致することを示していますが，それらが一致しないのはどのような状況が考えられますか．

$$\det A = K = \text{extrinsic curvature} \leftarrow (g_{ij}) \,\&\, (h_{ij})$$

$$K_{ds^2} \quad \text{intrinsic curvature} \leftarrow (g_{ij})$$

2D

$p : U \longrightarrow N^3(k)$, Riem. 3-mfd, constant sectional curv. k.

ds^2, II : well-defined

A : 〃

$$K_{ext} = \det A = K_{ds^2} - k \qquad \text{integrability cond}$$

Q and A

Q: 3次元以上の manifold にも sectional curvature が考えられるらしいのですが
✓ $K(\Pi_p) = \frac{\langle R(X_p,Y_p)X_p,Y_p\rangle}{\langle X_p,X_p\rangle\langle Y_p,Y_p\rangle-\langle X_p,Y_p\rangle^2}$ (R: curvature tensor, $\{X_p, Y_p\}$: T_pM の一次独立な vector). 3次元以上の manifold において，これを活用すると良いことなどはあるのでしょうか

たくさんある

2Q

2Q

- (local) Riemannian geometry
- curvatures as integrability conditions.
- spaces of constant curvature space form
- surfaces in space forms.

Q and A

Q: ガウス方程式はガウス曲率が第一基本量のみで表せることを表していましたが，コダッチ方程式もそれと同じように可積分条件の記述以外の意味をもつのでしょうか．

$$\mathrm{II} = \sum h_{ij}\, du^i du^j$$

a symmetric tensor of 2nd order.

cubic form

<u>Codazzi</u> $\Leftrightarrow$ $\nabla \mathrm{II}$ is symmetric

the covariant derivative

(3-tensor)

$\boxed{\text{Codazzi type tensors}}$