May 24, 2022
Kotaro Yamada
kotaro@math.titech.ac.jp

Info. Sheet 5; Advanced Topics in Geometry E (MTH.B501)

Informations

- Eleven homeworks were submitetd. The feedback will be found on T2SCHOLA.

Corrections

- Lecture note, page 23, line 14: (??) ⇒ (4.1)
- Lecture note, page 23, line −4: $\sum_{i,j,k} h_{ij;k} du^i \otimes du^j \otimes dv^k \Rightarrow \sum_{i,j,k} h_{ij;k} du^i \otimes du^j \otimes du^k$
- Lecture note, page 23, footnote: 14. May ⇒ 17. May
- Lecture note, page 24, line 5: *THeorem 4.3.* ⇒ *Theorem 4.3.* ⇒
- Lecture note, page 24, line −4: ++ ⇒ +
- Lecture note, page 26, line 9: that is,$g_{11,2}$...⇒ that is, $g_{11,2}$ (insert a space)

Students' comments

- Gauss と Codazzi, この講義で計算するきっかけができたので，計算します．多分来週の講義には楽しかったと思ってると思います． **Lecturer's comment** だといいね．
- (1) が解けませんでした． **Lecturer's comment** 確かに不人気でした．

Q and A

Q 1: ガウス方程式はガウス曲率が第一基本量のみで表せることを表していましたが，コダッチ方程式もそれと同じように可積分条件の記述以外の意味をもつのでしょうか．

A: 意図がわかりませんが，第二基本形式（対称テンソル）の共変微分の対称性を表している（Remark 4.4）が，このようなテンソルは曲面の第二基本形式以外にもさまざまな場面で現れる．

Q 2: Remark 4.5 について，Weingarten 行列の行列式を外的曲率とよぶ，ということを山田先生の 2017 年の講義資料で見かけました．Gauss の方程式では内的ガウス曲率と外的ガウス曲率が一致することを示していますが，それらが一致しないのはどのような状況が考えられますか．

A: 定曲率 k の 3 次元リーマン多様体（空間型とよぶ．球面や双曲空間）内の曲面のガウス方程式は $k + \det A = K_{ds^2}$．ただし K_{ds^2} は内的なガウス曲率．外的なガウス曲率とは，そとの空間の曲率だけの違いがある．

Q 3: 可積分条件の 1 つのガウス方程式で「断面曲率」という言葉が出ましたが，別々に定められた「ガウス曲率」と「断面曲率」が互いに等しいという風にガウス方程式をとらえるべきなんでしょうか．可積分条件が成り立たない図形（？）を扱う（扱うことがあるかも分かりませんが）ときは，ガウス曲率と断面曲率を分けて考える意味はありそうですか．

A: ご質問の「ガウス曲率」はワインガルテン行列の行列式のこと，断面曲率が K_{ds^2}（内的なガウス曲率）とするとそのとおりです．ワインガルテン行列は曲面が $\mathbb{R}^3$ にはめ込まれていないと定義できませんので，ガウス曲率も $\mathbb{R}^3$ の曲面として意味を持つのですが，K_{ds^2} は第一基本形式のみから定まるので，図形（多様体）に第一基本形式のみを付した対象（リーマン多様体）上で意味があります．この状況ではワインガルテン行列は存在しませんので「可積分条件を満たしていない」わけです．

Q 4: (4.5) の K_{ds^2} は "intrinsic Gaussian curvature" となっているが通常の Gaussian curvature との違いがイマイチよくわからない．

A: イマイチ，というのはどの辺まで分かっているのでしょうか．

Q 5: 3 次元以上の manifold にも sectional curvature が考えられるらしいのですが $K(\Pi_p) = \frac{\langle R(X_p,Y_p)X_p,Y_p\rangle}{\langle X_p,X_p\rangle\langle Y_p,Y_p\rangle - \langle X_p,Y_p\rangle^2}$ (R: curvature tensor, $\{X_p, Y_p\}$: T_pM の一次独立な vector)．3 次元以上の manifold において，これを活用すると良いことなどはあるのでしょうか．

A: あります．まず n 次元リーマン多様体を $\mathbb{R}^{n+1}$ の超曲面として実現するための可積分条件．$\frac{1}{2}n(n-1)$ 通りの断面曲率を利用します．断面曲率が一定なリーマン多様体はその局所的な構造が決まってしまいます．断面曲率の符号によってリーマン多様体の位相的な性質に制限がかかる場合があります．