

# Advanced Topics in Geometry F (MTH.B502)

Kotaro Yamada

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-4/`

Tokyo Institute of Technology

2022/06/21

f

## Informations:

- ▶ Seven homeworks were submitetd. The feedback will be found on T2SCHOLA.

## Students' comments

- ▶ 「部分多様体」, 「埋め込み」などの言葉は文脈によって意味がちがうので, まだヘタクソなので苦労しています.

山田のコメント: たしかに, しばらく先まで読まないという意味がわからないことがありますね.

- ▶ 何で矢野がベクトル場なのですか?

山田のコメント: 矢  $\rightarrow$  vector; 野  $\rightarrow$  field.

- ▶ 今Qもよろしくお願いします.

山田のコメント: ちょっと突っ走るけど許して下さい.

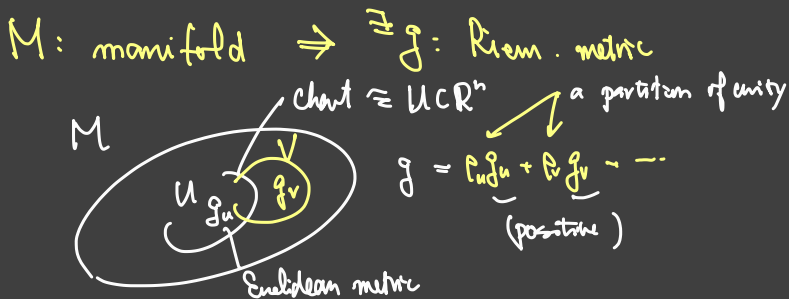
- ▶ 1Qの復習をします.

山田のコメント: なるほど. 可積分性を来週使います.

# Q and A

Q: Fact 1.3 で任意の (パラコンパクトな) 多様体はリーマン計量をもつとありますが, 擬リーマン計量 の場合はどうなのでしょう.

No



予版依存

Q:  $V$ : ベクトル空間,  $V^*$ :  $V$  の双対空間としたときに、内積の有無と標準的な同型の有無についての話がありました。が「標準」の意味がわかりません。この場合、 $v, w \in V$  に対して  $g(v, w) \in \mathbb{R}$  という内積が備わっているときの  $V$  から  $V^*$  への標準的な同型写像というのは  $v \in V$  に対して  $g(v, \cdot) \in V^*$  を対応させるものが「標準的な同型」なののでしょうか。また、もしこれが標準的な同型であったとしても、標準的である、という概念の使われ方の一例にすぎないと思うのですが、そもそも一般論として「標準的な」とはどういう意味なんですか？

$V$ : a vector sp,  $\dim V < \infty$

$V^*$  = the dual of  $V = \{\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}; \text{linear}\}$

$\langle, \rangle$  an inner product on  $V$ . (not nec. positive)

$b: V \ni v \mapsto \langle v, * \rangle \in V^*$   
↓ (trivial)      ↓ the canonical isomorphism

Claim  $b$ : a linear isomorphism.

⊙  $\text{Ker } b = \{v \in V; v^b = 0\}$  as an element of  $V^*$

non-degeneracy  $\neq \{v \in V; \langle v, * \rangle = 0\}$

$= \{v \in V; \langle v, w \rangle = 0 \text{ for } \forall w\}$

$= \{0\} \Rightarrow b$ : injective

$\dim \text{Im } b = \dim V - \dim \text{Ker } b = \dim V^*$   $b$ : surjection