Advanced Topics in Geometry F (MTH.B502)

Kotaro Yamada
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-f/

Tokyo Institute of Technology

2022/07/05

Informations:

- Nine homeworks were submitetd. The feedback will be found on T2SCHOLA.
- Apologize for cancelation of last weeks' lecture.

Students' comments

- 2 次元だと外微分の定義が楽.
  山田のコメント：まあそうですね.
- 来週の授業の日に誕生日を迎えます！
  山田のコメント：休講にして申し訳ありません．おめでとうございます.
- また 2Q もよろしくおねがいします．Space form の話が中心ということでたのしみです.
  山田のコメント：中心というほど詳細を扱うわけではないですが.... ところで，これは第 1 回の課題?

Q and A

def ?

Q: $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ を部分多様体とする．Whitney のはめ込み定理によってはめこみ $f\colon M^2 \to \mathbb{R}^3$ が存在する．(Q. $f(M^2) = M^2$ はいえますか?) このとき M の任意の連結座標近傍 (U, φ) に対して，$D = \varphi(U)$ とおくと，D は領域で $p = f \circ \varphi^{-1} : D \to \mathbb{R}^3$ は正則曲面 (M^2 の正則なパラメータ表示) を与える．逆に正則パラメータ表示 $p\colon D \to p(D) \subset M^2$ があったとする．このとき，p から M^2 に局所座標を誘導できると思うのですがどう示すのですか？（今まで $(dp)_{(u,v)} : T_{(u,v)}D \to T_{p(u,v)}p(D)$ が p で正則であることから同型写像となり，逆関数定理から $p\colon D \to p(D)$ が局所微分同相になる，と思っていたのですが，$p(D)$ が 2 次元多様体の構造を持っているか不明なため，$\dim D = \dim p(D)$ が成立しないのでは？ と思っています．$p(D)$ が開集合とも限らないので）．

?

Q and A

Q: Lem. 2.7 において "∇ は bilinear" としていますが，これは "$\mathbb{R}$ 上 bilinear" の意味と考えて良いですか？

Q: リーマン接続の 2 条件にキカ的な意味はありますか？

∇ nabla

$\nabla : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)}_{\text{vector space } /\mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(M)}_{\mathcal{F}(M)\text{-module}}$

$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y$

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ ← torsion free

$=: T(X, Y)$: tensor : torsion tensor

(→ Ricci tensor is sysmmetric
→ "Codazzi" eq)

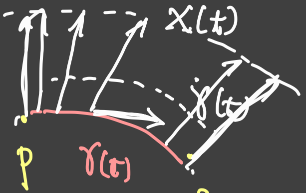
- $X\langle Y, Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle = 0$

→ g: parallel (平行), $(\nabla g = 0)$

(isometric)

$\exists \; T_qM \longrightarrow T_pM$

isomorphism



parallel translation

M

$$\boxed{\nabla_{\dot\gamma(t)} X(t) = 0}$$

X: parallel along γ

Q and A

Q: 接続についての質問：多様体 M の接束（一般にベクトル束）の切断 s とベクトル場 X に対して $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \ni s \mapsto \nabla_X s \in \mathfrak{X}(M)$．この対応はベクトル場 X の不老 $\varphi_t : M \to M$ が誘導する接空間の同型のありかたをひとつ定めるという解釈は正しい？（あるいは正当化できる？）$s_{p'} \in T'_p M$ を $T_p M$ に写す方法はいろいろある．接続をひとつ決めるということはこの写す方法をひとつ決めるということ？

フロー (flow)

Q and A

Q: Minkowski space などの pseudo Riemannian mentric からは擬距離しか定まりませんが，それを利用するとよいことはあるのでしょうか？ (geodesic なども すごい考えづらいきがします)

relativity

easy

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \text{const} \quad \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

light-like geodesic (locus of light)