

July 05, 2022
Kotaro Yamada
kotaro@math.titech.ac.jp

Info. Sheet 3; Advanced Topics in Geometry F (MTH.B502)

Informations

- Nine homeworks were submitted. The feedback will be found on T2SCHOLA.
- Apologize for cancelation of last weeks' lecture.

Corrections

- Lecture Note, page 5, line 4: smooth vector fields on $M \Rightarrow$ smooth vector fields **on** M
- Lecture Note, page 5, line -15: cotangent bundle $\Gamma(T^*M) \Rightarrow$ cotangent bundle **T^*M**
- Lecture Note, page 5, line -15: *covariant 1-tensor* or a 1-form \Rightarrow *covariant 1-tensor* **or** a 1-form (insert a space)
- Lecture Note, page 5, line -7: $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(p) \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$
- Lecture Note, page 5, line -5: $\omega_p: T^*M \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \omega_p: T_pM \rightarrow \mathbb{R}$
- Lecture Note, page 6, equation (2.8): $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle \Rightarrow X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_X Z \rangle$
- Lecture Note, page 6, line -8: for all $X, Y \in T_pM \Rightarrow$ for all **$Y \in T_pM$**
- Lecture Note, page 7, line 6: $+\langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle. \Rightarrow -\langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle.$
- Lecture Note, page 7, equation (2.9): $2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle \Rightarrow 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle$
- Lecture Note, page 7, line 9: $\langle [Z, Y], X \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle \Rightarrow \langle [Z, Y], X \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle$
- Lecture Note, page 7, line 22: *frame on U .* if \Rightarrow *frame on U* if (remove the period.)
- Lecture Note, page 8, line 5: $\Theta = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) \Rightarrow \Theta = \Theta \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n).$

Students' comments

- 2次元だと外微分の定義が楽。 **Lecturer's comment** まあそうですね。
- 来週の授業の日に誕生日を迎えます！ **Lecturer's comment** 休講にして申し訳ありません。おめでとうございます。
- また2Qもよろしくおねがいします。Space formの話が中心ということでのしみです。

Lecturer's comment 中心というほど詳細を扱うわけではないですが... ところで、これは第1回の課題？

Q and A

- Q 1:** Lem. 2.7 において “ ∇ は bilinear” としていますが, これは “ \mathbb{R} 上 bilinear” の意味と考えて良いですか?
- A:** はい. $\mathcal{F}(M)$ ではなく \mathbb{R} 上.
- Q 2:** Minkowski space などの pseudo Riemannian metric からは擬距離しか定まりませんが, それを利用するとよいことはあるのでしょうか? (geodesic などすごい考えづらいきがします)
- A:** たとえば, Lorentz 多様体の geodesic は Riemann と全く同様に定義できます. ただし「速さの 2 乗」 $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$ は正負の符号をもつわけです. たとえば $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ となる測地線 (light-like geodesic) は Lorentz 多様体の「光の経路」を表します.
- Q 3:** 接続についての質問: 多様体 M の接束 (一般にベクトル束) の切断 s とベクトル場 X に対して $\nabla_X: \mathfrak{X}(M) \ni s \mapsto \nabla_X s \in \mathfrak{X}(M)$. この対応はベクトル場 X の不変 $\varphi_t: M \rightarrow M$ が誘導する接空間の同型のありかたをひとつ定めるという解釈は正しい? (あるいは正当化できる?) $s_{p'} \in T_{p'}M$ を T_pM に写す方法はいろいろある. 接続をひとつ決めるということはこの写す方法をひとつ決めるといふこと?
- A:** その通り. 「平行移動」の概念を用いて説明できます.
- Q 4:** リーマン接続の 2 条件にキカ的な意味はありますか?
- A:** (1) 「振じれない torsion free」というある種の対称性の条件. これからリッチ・テンソル (ここでは扱わない) の対称性が従う. (2) 「計量テンソルが平行」これから平行移動が接空間の間の等長対応を与えることが従う.
- Q 5:** $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ を部分多様体とする. Whitney のはめ込み定理によってはめこみ $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在する. (Q. $f(M^2) = M^2$ はいえますか?) このとき M の任意の連結座標近傍 (U, φ) に対して, $D = \varphi(U)$ とおくと, D は領域で $p = f \circ \varphi^{-1}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ は正則曲面 (M^2 の正則なパラメータ表示) を与える. 逆に正則パラメータ表示 $p: D \rightarrow p(D) \subset M^2$ があったとする. このとき, p から M^2 に局所座標を誘導できると思うのですがどう示すのですか? (今まで $(dp)_{(u,v)}: T_{(u,v)}D \rightarrow T_{p(u,v)}p(D)$ が p で正則であることから同型写像となり, 逆関数定理から $p: D \rightarrow p(D)$ が局所微分同相になる, と思っていたのですが, $p(D)$ が 2 次元多様体の構造を持っているか不明なため, $\dim D = \dim p(D)$ が成立しないのでは? と思っています. $p(D)$ が開集合とも限らないので).
- A:** 状況がよくわかっていませんが, M^2 は \mathbb{R}^3 に埋め込まれた部分多様体? そうなら f は inclusion では?