Advanced Topics in Geometry F (MTH.B502)

Kotaro Yamada
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-f/

Tokyo Institute of Technology

2022/07/12

Informations:

- Eight homeworks were submitetd. The feedback will be found on T2SCHOLA.

Students' comments

- prop 3.2 を資料にしたがって使ってみると $\omega = 0$ になって困った.
  山田のコメント：申し訳ありません.

- さすがについていけなくなってきました…何か和書などで本講座に対応するようなおすすめの参考書があれば少し勉強しやすくなると思うのですが.

  Riemannian Geometry

- $ddF = 0$ が integrability condition ということに感動しました. 幾何と代数の橋渡しのようなものを感じました.

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$ddf = \sum_{j<i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i$$

0

Corrections

orthonormal $[\theta_j]$

- Lecture Note, page 9, line 16:

$$\omega_i^j(\boldsymbol{e}_k) = \frac{1}{2}\Big(\langle[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j], \boldsymbol{e}_k\rangle - \langle[\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k], \boldsymbol{e}_i\rangle + \langle[\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i], \boldsymbol{e}_j\rangle\Big)$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_i^j(\boldsymbol{e}_k) = \frac{1}{2}\Big(-\langle[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j], \boldsymbol{e}_k\rangle + \langle[\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k], \boldsymbol{e}_i\rangle + \langle[\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i], \boldsymbol{e}_j\rangle\Big)$$

- Lecture Note, page 10, bottom:

$$\Omega \wedge \Omega = \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

$$\Rightarrow \qquad \Omega \wedge \Omega = \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k^i \wedge \omega_j^k\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Q and A

Q: 接続形式 Ω を行列表示 $\Omega = (\omega_i^j)$ としたときの ω_i^j は Ex 3.1 のように具体的な計量を与えられたリーマン多様体で計算で求まるものでしょうか．それとも $\omega_j^i = \langle \nabla \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle$ の $\nabla \boldsymbol{e}_j$ の部分が分からないことがより根本的な疑問かもしれません．

A: 今回，計算を少しやってみます．

Q and A

Q: Integrability が外微分の式でかけることは，2 次元以上でもこれは成り立つので，高次元の埋め込みの基本定理のように思ってもよいのでしょうか.

A: はい，それを次の次くらいにやります.

Fundamental Theorem for hypersurfaces

超曲面

codimension 1

(cf: 曲面 : (dim = 2))