Advanced Topics in Geometry F (MTH.B502)

Kotaro Yamada
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-f/

Tokyo Institute of Technology

2022/07/19

Informations:

- Nine homeworks were submitetd. The feedback will be found on T2SCHOLA.

Students' comments

- 前回の問ができなかったのですが，解説がいつもより丁寧だったので，計算を追えました．ありがとうございました．
  山田のコメント：どういたしまして．

- 2 次元のとき，正規直交枠を $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ と書いていますが，ベクトル場の括弧積にも見えるので好ましくない気がします．
  山田のコメント：そうですね．いまから変更するわけに行かないですが．

- あつい… 山田のコメント：はい．

Q and A

$\bigcup_p (\text{2-dim subsp in } T_pM)$

$K : Gr_2(TM) \to \mathbb{R}$

Gaussian curvature for $n=2$

$\dim M = 2$

$K : M \to \mathbb{R}$

Q: 曲面論で出てきたガウス曲率というのは，曲面の各点で定まっている値であったが，これは曲面に適当な Riemann 計量を入れた時の断面曲率として解釈できる？

1st fundamental form

Q: 曲線に曲率の他に~~例~~率があったのと同様に多様体 (M, g) にも “捩率形式” のようなものがあって，(M, g) を特徴づけられるのでしょうか？

捩

Gaussian curvature $\dfrac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}} =: K$

$K = (E, F, G)$'' intrinsic (M^2, ds^2) Gaussian curvature

Gauss eq : an integrability condition

Torsion of space curves : the 2-nd curvature
(第2曲率)

☆ torsion tensor

∇: a linear connection on TM

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

- ∇: Levi Civita connection of (M, g)

$$\Rightarrow T = 0 \quad \text{(torsion free)}$$

$$\Leftrightarrow d\omega^i = \sum_s \omega^s \wedge \omega_s^i$$

☆ torsion free $\Rightarrow$ Ricci tensor

symmetricity of

Q and A

?. Geometric meaning.

Q: リーマン曲率テンソル R_{ijkl} を 1 回縮約するとリッチテンソル R_{ij}，2 回縮約してスカラー曲率 R となりますが，このとき，縮約は幾何学的にはどのような意味を持つのでしょうか？

平均 ?

$d\,d\omega^i = 0$

Q: ビアンキの第 1，第 2 恒等式は幾何学的にはどのような意味を持つのでしょうか？

symmetricity of K

Q: ビアンキの第 2 恒等式を 2 回縮約して，アインシュタインの重力場の方程式を作っていますが，このとき，縮約は幾何学的にはどのような意味を持つのでしょうか？

Q and A

Q: 今回の講義の $\kappa^i_j(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l)$ は $R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = -\nabla_{\boldsymbol{e}_i}(\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_k) + \nabla_{\boldsymbol{e}_j}(\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_k) + \nabla_{[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j]}\boldsymbol{e}_k$ としたとき $\kappa^i_j(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \langle R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l\rangle$ のことだと思ったのですが，あってますでしょうか？ また同じである計算がわかりません．

opposite sign

Riemann curvature tensor

$$\boxed{R(e_k, e_l)e_j}$$

$$\kappa^i_j(e_k, e_l) = \langle \underline{\nabla_{e_k}\nabla_{e_l} e_j - \nabla_{e_l}\nabla_{e_k} e_j - \nabla_{[e_k, e_l]} e_j}, e_i \rangle$$

$$\cdot\ \omega^k_j(e_l) = \langle \nabla_{e_l} e_j, e_k \rangle$$

$$\cdot\ X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

Supplement

Corollary (Cor. 4.3)
$\kappa^i_j(e_k, e_l) = \kappa^k_l(e_i, e_j)$.

$K(e_k \wedge e_l, e_i \wedge e_j)$
$= K(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l)$

1st Bianchi

$\kappa^j_i = -\kappa^i_j$
$\kappa^j_i(e_k\ e_l)$
$= -\kappa^i_j(e_k\ e_l)$

$$
\begin{aligned}
\kappa^i_j(e_k, e_l) + \kappa^i_k(e_l, e_j) + \kappa^i_l(e_j, e_k) &= 0\\
\kappa^j_k(e_i, e_l) + \kappa^j_i(e_l, e_k) + \kappa^j_l(e_k, e_i) &= 0\\
+)\quad \kappa^k_i(e_j, e_l) + \kappa^k_j(e_l, e_i) + \kappa^k_l(e_i, e_j) &= 0.
\end{aligned}
$$

$0 = 2\left(\kappa^i_j(e_k\ e_l) + \kappa^k_i(e_j\ e_l) + \kappa^k_j(e_l\ e_i)\right)$

$-\kappa^k_l(e_i\ e_j)$

$-\kappa^l_i(e_j\ e_k)$
$-\kappa^l_j(e_k\ e_i)$
$-\kappa^l_k(e_i\ e_j)$
$= 0$