

Advanced Topics in Geometry F (MTH.B502)

Kotaro Yamada

kotaro@math.titech.ac.jp

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-f/>

Tokyo Institute of Technology

2022/07/19

Informations:

- ▶ Nine homeworks were submitted. The feedback will be found on T2SCHOLA.

Students' comments

- ▶ 前回の問ができなかったのですが、解説がいつもより丁寧だったので、計算を追えました。ありがとうございました。
山田のコメント：どういたしまして.
- ▶ 2次元のとき、正規直交枠を $[e_1, e_2]$ と書いていますが、ベクトル場の括弧積にも見えるので好ましくない気がします。
山田のコメント：そうですね。いまから変更するわけに行かないですが.
- ▶ あつい... 山田のコメント：はい.

Q and A

- Q: 曲面論で出てきたガウス曲率というのは、曲面の各点で定まっている値であったが、これは曲面に適切な Riemann 計量を入れた時の断面曲率として解釈できる？
- Q: 曲線に曲率の他に捩率があったのと同様に多様体 (M, g) にも“捩率形式”のようなものがある、 (M, g) を特徴づけられるのでしょうか？

Q and A

- Q: リーマン曲率テンソル R_{ijkl} を1回縮約するとリッチテンソル R_{ij} , 2回縮約してスカラー曲率 R となりますが, このとき, 縮約は幾何学的にはどのような意味を持つのでしょうか?
- Q: ビアンキの第1, 第2恒等式は幾何学的にはどのような意味をもつのでしょうか?
- Q: ビアンキの第2恒等式を2回縮約して, アインシュタインの重力場の方程式を作っていますが, このとき, 縮約は幾何学的にはどのような意味を持つのでしょうか?

Q and A

Q: 今回の講義の $\kappa_j^i(e_k, e_l)$ は $R(e_i, e_j)e_k = -\nabla_{e_i}(\nabla_{e_j}e_k) + \nabla_{e_j}(\nabla_{e_i}e_k) + \nabla_{[e_i, e_j]}e_k$ としたとき $\kappa_j^i(e_k, e_l) = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$ のことだと思ったのですが、あってますでしょうか？ また同じである計算がわかりません.

Supplement

Corollary (Cor. 4.3)

$$\kappa_j^i(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \kappa_l^k(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

$$\kappa_j^i(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + \kappa_k^i(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j) + \kappa_l^i(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0$$

$$\kappa_k^j(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) + \kappa_i^j(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k) + \kappa_l^j(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) = 0$$

$$\kappa_i^k(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l) + \kappa_j^k(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i) + \kappa_l^k(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0.$$