July 19, 2022
Kotaro Yamada
kotaro@math.titech.ac.jp

Info. Sheet 5; Advanced Topics in Geometry F (MTH.B502)

Informations

- Nine homeworks were submitetd. The feedback will be found on T2SCHOLA.

Corrections

- Lecture Note, page 4, line 17:
$$H^n(-c^2) := \left\{ \boldsymbol{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -\frac{1}{c^2}, cx_0 > 0 \right\}$$
$$\Rightarrow \qquad H^n(-c^2) := \left\{ \boldsymbol{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_L = -\frac{1}{c^2}, cx_0 > 0 \right\}$$
- Lecture Note, page 13, line 10: $X\alpha(Y, Z)d+ \Rightarrow X\alpha(Y, Z)+$
- Lecture Note, page 14, line 5: Remove the right parenthesis.
- Lecture Note, page 14, line -9 (eq. (4.6)):
$$d\omega^j = \sum_l \omega^l \omega^l_j \qquad \Rightarrow \qquad d\omega^j = \sum_l \omega^l \wedge \omega^l_j$$
- Lecture Note, page 14, line -4:
$$\sum_s \left(d\omega^s \wedge \omega^i_s - \omega^s \wedge \omega^i_s\right) \qquad \Rightarrow \qquad \sum_s \left(d\omega^s \wedge \omega^i_s - \omega^s \wedge d\omega^i_s\right)$$
- Lecture Note, page 14, line -3:
$$\sum_{s,m} \omega^s \wedge \omega^i_m \wedge \omega^m_s - - \sum_s \omega^s \wedge \kappa^i_s \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{s,m} \omega^s \wedge \omega^i_m \wedge \omega^m_s - \sum_s \omega^s \wedge \kappa^i_s$$
- Lecture Note, page 15, line 2:
$$\sum_s \big(\omega^s(\boldsymbol{e}_j)\kappa^i_s(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l)\omega^s(\boldsymbol{e}_k)\kappa^i_s(\boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_j)\omega^s(\boldsymbol{e}_l)\kappa^i_s(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)\big)$$
$$\Rightarrow \qquad \sum_s \big(\omega^s(\boldsymbol{e}_j)\kappa^i_s(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) + \omega^s(\boldsymbol{e}_k)\kappa^i_s(\boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_j) + \omega^s(\boldsymbol{e}_l)\kappa^i_s(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)\big)$$
- Lecture Note, page 15, line 3:
$$\sum_s \big(\delta^s_j \kappa^i_s(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l)\delta^s_k \kappa^i_s(\boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_j)\delta^s_l \kappa^i_s(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)\big)$$
$$\Rightarrow \qquad \sum_s \big(\delta^s_j \kappa^i_s(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) + \delta^s_k \kappa^i_s(\boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_j) + \delta^s_l \kappa^i_s(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)\big)$$
- Lecture Note, page 15, line 4: $\kappa^i_l(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k \Rightarrow \kappa^i_l(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$
- Lecture Note, page 15, line 8:
$$\kappa^i_j(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) + \kappa^i_k(\boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_i) + \kappa^i_l(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \kappa^i_j(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) + \kappa^i_k(\boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_j) + \kappa^i_l(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = 0$$
- Lecture Note, page 15, line 16: As a immediate ⇒ As an immediate
- Lecture Note, page 15, line -6:
$$K(\Pi) = \frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})}{\langle \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \rangle} \qquad \Rightarrow \qquad K(\Pi_p) = \frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})}{\langle \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \rangle}$$
- Lecture Note, page 16, line 8: position vector vector ⇒ position vector

Students' comments

- 前回の問ができなかったのですが，解説がいつもより丁寧だったので，計算を追えました．ありがとうございました．

  Lecturer's comment どういたしまして．

- 2 次元のとき，正規直交枠を $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ と書いていますが，ベクトル場の括弧積にも見えるので好ましくない気がします．

  Lecturer's comment そうですね．いまから変更するわけに行かないですが．

- あつい… **Lecturer's comment** はい．

Q and A

Q 1: 曲線に曲率の他に例率があったのと同様に多様体 (M, g) にも "捩率形式" のようなものがあって，(M, g) を特徴づけられるのでしょうか？

A: この文脈で何を曲線の捩率に対応するものにするか，は議論が必要ですが（空間曲線の捩率はある種の曲率で，第二曲率ともよばれます），接束の接続には「捩率テンソル」という量が存在して，レビ・チビタ接続はその定義から捩率が 0 になります．参考：接続 ∇ の捩率テンソルの定義：$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$．レビ・チビタ接続はこれが消えることを要求しています．微分形式で表示すると $d\omega^j - \sum_s \omega^s \wedge \omega_s^j = 0$.

Q 2: リーマン曲率テンソル R_{ijkl} を 1 回縮約するとリッチテンソル R_{ij}，2 回縮約してスカラー曲率 R となりますが，このとき，縮約は幾何学的にはどのような意味を持つのでしょうか？

A: 平均．リーマン曲率テンソルの「幾何学的意味」をどう考えるかにもよりますよね．

Q 3: ビアンキの第 1，第 2 恒等式は幾何学的にはどのような意味をもつのでしょうか？

A: 実際，第 4 回の講義で使ってみたと思いますが，ビアンキの第 1 恒等式は $\boldsymbol{K}$（講義で扱った記号）の対称性を導くという意味で幾何学的な意味がありますね．第 2 恒等式の使い方は今回やります．

Q 4: ビアンキの第 2 恒等式を 2 回縮約して，アインシュタインの重力場の方程式を作っていますが，このとき，縮約は幾何学的にはどのような意味を持つのでしょうか？

A: ビアンキの縮約が本質でしょうか？

Q 5: 今回の講義の $\kappa_j^i(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l)$ は $R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = -\nabla_{\boldsymbol{e}_i}(\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_k) + \nabla_{\boldsymbol{e}_j}(\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_k) + \nabla_{[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j]}\boldsymbol{e}_k$ としたとき $\kappa_j^i(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \langle R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l\rangle$ のことだと思ったのですが，あってますでしょうか？また同じである計算がわかりません．

A: $\langle \nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k\rangle = \boldsymbol{e}_i \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k\rangle - \langle \boldsymbol{e}_j, \nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_l\rangle = -\langle \boldsymbol{e}_j, \nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_l\rangle$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\kappa_j^i(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) &= d\omega_j^i(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) + \sum_s (\omega_s^i(\boldsymbol{e}_k)\omega_j^s(\boldsymbol{e}_l) - \omega_s^i(\boldsymbol{e}_l)\omega_j^s(\boldsymbol{e}_k)) \\
&= \boldsymbol{e}_k(\omega_j^i(\boldsymbol{e}_l)) - \boldsymbol{e}_l(\omega_j^i(\boldsymbol{e}_k)) - \omega_j^i([\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l]) + \sum_s (\omega_s^i(\boldsymbol{e}_k)\omega_j^s(\boldsymbol{e}_l) - \omega_s^i(\boldsymbol{e}_l)\omega_j^s(\boldsymbol{e}_k)) \\
&= \boldsymbol{e}_k \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle - \boldsymbol{e}_l \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle - \left\langle \nabla_{[\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l]}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\right\rangle \\
&\quad + \sum_s (\langle \nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_i\rangle \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_s\rangle - \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_i\rangle \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_s\rangle) \\
&= \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_k}\nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle - \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle - \left\langle \nabla_{[\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l]}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\right\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_j, \nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_i\rangle - \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j, \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_i\rangle \\
&\quad - \sum_s (\langle \boldsymbol{e}_s, \nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_i\rangle \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_s\rangle - \langle \boldsymbol{e}_s, \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_i\rangle \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_s\rangle) \\
&= \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_k}\nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle - \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle - \left\langle \nabla_{[\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l]}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\right\rangle = -\langle R(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l)\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle.
\end{aligned}
$$

Q 6: 曲面論で出てきたガウス曲率というのは，曲面の各点で定まっている値であったが，これは曲面に適当な Riemann 計量を入れた時の断面曲率として解釈できる？

A: 第一基本形式をリーマン計量と思ったときの断面曲率（2 次元なので，点のみによって定まる曲面上の関数）．