

July 26, 2022  
 Kotaro Yamada  
 kotaro@math.titech.ac.jp

## Info. Sheet 6; Advanced Topics in Geometry F (MTH.B502)

### Informations

- Seven homeworks were submitted. The feedback will be found on T2SCHOLA.
- Today's homework is the final one. Total score will be informed via T2SCHOLA.
- The class of the next week (August 2) is a supplemental lecture, (and the real class room may not be assigned).
- Please fill the form "Course Survey" in T2SCHOLA.

### Corrections

- Lecture Note, page 17, line 14:  $\kappa_i^j = k\omega^i \wedge \omega^j \Rightarrow \kappa_j^i = k\omega^i \wedge \omega^j$
- Lecture Note, page 17, line 16:  $\mathbf{K}(e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j) \Rightarrow \mathbf{K}(e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j)$  (Remove the right bracket.)
- Lecture Note, page 18, line 15:  $\kappa_i^j = d\omega_i^j + \sum_s \omega_s^i \wedge \omega_j^s \Rightarrow \kappa_i^j = d\omega_i^j + \sum_s \omega_s^j \wedge \omega_i^s$
- 
- Lecture Note, page 18, line -3:  $\gamma :: [0, +\infty) \Rightarrow \gamma: :[0, +\infty)$
- Lecture Note, page 18, line -2: Insert the following sentence before the tag for the footnote 5: **If any divergent path has infinite length,  $(M, g)$  is said to be complete.**
- Lecture Note, page 18, footnote: any geodesic  $\Rightarrow$  any geodesics
- Lecture Note, page 19, line -6:  $e_0 = \frac{1}{c}x \Rightarrow e_0 = cx$
- Lecture Note, page 19, line -3:

$$de_0 = \frac{1}{c}dx = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^n \omega^j e_j \quad \Rightarrow \quad de_0 = cdx = c \sum_{j=1}^n \omega^j e_j$$

- Lecture Note, page 20, line 2:  $\frac{1}{c}\omega^j \Rightarrow c\omega^j$
- Lecture Note, page 20, line 6:  $0 = c dde_0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{c} dde_0$
- Lecture Note, page 20, line 12:

$$de_j = \frac{1}{c}\omega^j e_0 + \sum_s \omega_j^s e_s \quad \Rightarrow \quad de_j = c\omega^j e_0 + \sum_s \omega_j^s e_s$$

- Lecture Note, page 20, line 13: ' Then  $\Rightarrow$  Then (Remove the apostrophe.)
- Lecture Note, page 20, line 13:
- Lecture Note, page 20, line 14:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}t\omega \\ \frac{1}{c}\omega & \Omega \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & c^t\omega \\ c\omega & \Omega \end{pmatrix}$$

- Lecture Note, page 20, line 16:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}t\omega \wedge \omega & \frac{1}{c}(d^t\omega + t\omega \wedge \Omega) \\ \frac{1}{c}(d\omega + \Omega \wedge \omega) & d\Omega + \Omega \wedge \Omega + \frac{1}{c^2}\omega \wedge t\omega \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c^2t\omega \wedge \omega & c(d^t\omega + t\omega \wedge \Omega) \\ c(d\omega + \Omega \wedge \omega) & d\Omega + \Omega \wedge \Omega + c^2\omega \wedge t\omega \end{pmatrix}$$

- Lecture Note, page 20, line 18:

$$\kappa_i^j + \frac{1}{c^2}\omega^i \wedge \omega^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa_i^j + c^2\omega^i \wedge \omega^j = 0$$

- Lecture Note, page 20, line 20:  $-\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2$

**Students' comments**

- 講義の内容が複雑で十分整理できていないのが残念です。一方で、にもかかわらず先生の話聞いてると各回、なんとか問題の解答らしきものに到達できているのが不思議です。

**Lecturer's comment** 未整理で申し訳ない。問題をベースに講義を組み立てているのでおっしゃるようになりますね。

- 数学は難しいとつくづく感じます。

**Lecturer's comment** そうですね。

- 曲率とは何なのか、どんどん分からなくなって行くような気がします。

**Lecturer's comment** そうなんですよ。多義的ですよ。

- 問題を解く時間がないのであった...

**Lecturer's comment** そうであったか。残念。

- この講義もあと2回かと思うとさみしいです。

**Lecturer's comment** やっとおわる...

- ゲームに生活をこわされています。自制する方法をさがしています。

**Lecturer's comment** なるほどねえ。

**Q and A**

**Q 1:** sectional curvature は各点それだけではなく、その点のまわりの情報も含んでいるでしょうか。各点  $p$  ですべての  $\Pi_p \in \text{Gr}(T_p M)$  について  $K(\Pi_p) = k(p)$  のとき、全域で constant という定理は各点での情報がまわりにもおよんでいるように思いました。

**A:** 計量の2階微分までの情報でままりますね。等方性から全体で定数となるのはなんとも不思議ではありますが、曲率の「対称性」から微分が消えるという仕組みです。

**Q 2:** 断面曲率は1点の周りで定まるのではなく、1点のみで定まるのですか。

**A:** 計量の2階微分までの情報で定まります。

**Q 3:** 断面曲率の“断面”ときいて  $\mathbb{R}^3$  の曲面の直截口を思い出しました。曲面の方ベクトルを含む平面を決めるごとに平面曲線が定まり、曲率が定まり、主曲率の積として Gauss 曲率を定めることができますが、このことの一般化のような意味で断面曲率をとらえることができますか。

**A:** なんらかの曲面の曲率と理解できますが、まだうまく説明できません。