線形代数学第一 (LAS.M102-10)

行列の演算

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/04/15

行列の加法・スカラ倍の性質

- テキスト 6, 10 ページ ← あたりまえ
- 零行列

$$A + O = A$$

加法の単位元 (零元)

$$A + (-A) = O$$

$$\| $$

$$(-1)A$$

行列の積の成分表示

$A = [a_{ij}]_{i=1\cdots m,\ j=1\cdots l}$

- $A = [a_{ij}]$ $((\overset{3}{m}, \overset{2}{l})$ 型$)$; $B = [b_{ij}]$ $((\overset{2}{l}, \overset{4}{k})$ 型$)$
- $\boxed{C = AB} = [c_{pq}]$ $((m, k)$ 型$)$

$$\boxed{c_{pq} = \sum_{j=1}^{l} a_{\cancel{i}j} b_{j\cancel{k}}}$$

p q

Typo (typographical error)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23}$$

行列の積の性質

テキスト9ページ

$(AB)C = A(BC)$ 結合法則

これが成り立つので

"ABC"

という記法が意味をもつ

$y = Ax$　　　$z = By = (BA)x$

- テキスト 10 ページ：l 次の単位行列 E_l (E と書くことも多い)
- A：(m,k) 型 $\Rightarrow AE_k = A,\ E_m A = A.$

正方行列

$$[a_{ij}]$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}]_{i,j=1,\dots,3}$$

delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

対角成分

対角成分が 1, 他は 0 となる正方行列

$$(AE \text{の } pq \text{成分}) = \sum_{r=1}^{k} a_{pr}\delta_{rq} = a_{pq}$$

$r=q$ のときだけ 1

非可換性 (掛け算の順序問題)

テキスト 12 ページ

AB ;　　BA

・undefined

・ABとちがう形

ABが正方行列

・ABと異なる

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

零因子

テキスト 12 ページ

次回

転置・随伴

$A : (m, k)$ 型

- 転置 ${}^tA$
- 共役 $\overline{A}$
- 随伴 A^*

次回

問題

2 次正方行列 A で

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A^2 - 3A + 2E} = O_{2,2}$$

を満たすものをすべて求めなさい.

$$A^2 = AA$$

一般に、ひとしくない

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad (A+B)^2$$

$$(A+B)(A+B) = A^2 + \underline{BA + AB} + B^2$$

$$A^2 - 2A + E = (A+E)^2 \qquad AE = EA = A$$

問題 2-2

問題

行列 A, B の積が定義できるとき，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Tenchi

transposition

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A^T Aの転置

$$A = [a_{ij}]$$

$${}^tA = [b_{ij}] \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$$