線形代数学第一 (LAS.M102-10)

正方行列

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/04/18

非可換性　かけざんの順序問題

テキスト 12 ページ

“$A(B+C) = AB + AC$”

(AB)　　(BA)

・一方が定義できない　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

・両方とも定義できるが型がちがう　$A = [1, 2]$　$B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$AB = [0] = 0$　　$BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

・両方とも定義できて同じ型　A, B: n次正方行列

（値もひとしい
値がちがうことがある）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

- $R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

可換

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha)$$

because

$$R(\alpha)R(\beta)$$

加法定理

$$= R(\alpha+\beta)$$

$$= R(\beta+\alpha)$$

$$= R(\beta)R(\alpha)$$

- $P(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

可換

$$P(\delta+\mu) = P(\delta)P(\mu) = P(\mu)P(\delta)$$

Theorem

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$$

対角行列

diagonal matrix

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & b_m \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow AB = BA$

(∗) $= \sum_{k=1}^{m} a_p b_k \delta_{pk} \delta_{kq}$

$= a_p b_q \delta_{pq}$?

∵ $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ とおくと

$\alpha_{ij} = a_i \delta_{ij}$ $\beta_{ij} = b_i \delta_{ij}$ とかける (δ: Kronecker's delta

$AB = [\gamma_{pq}]$ とおくと $\gamma_{pq} = \sum_k \alpha_{pk} \beta_{kq}$ (∗)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\neq$$

$$A^2 + 2AB + B^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)(A+B)$$

$$= A(A+B) + B(A+B)$$

$$= AA + (AB + BA) + BB$$

$$\neq 2AB$$

零因子

テキスト 12 ページ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$AB = O$ $(A \neq O,\ B \neq O)$

- 2次方程式 $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2, 1$ or

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ or $x - 1 = 0$

数の集合（体）は非自明な零因子をもたない。

転置・随伴

$A:(m,k)$ 型

- 転置 ${}^tA$
- 共役 $\overline{A}$
- $\boxed{\text{随伴}\ A^*}$

(A: 実行列)

${}^tA \quad A^T \qquad$ t: 転置 transposition

$A=[a_{ij}]\quad i=1\cdots m,\ j=1\cdots k$

${}^tA=[\hat{a}_{ij}] \qquad \hat{a}_{ij}=a_{ji}$

$\underline{(k,m)\text{ 型}}$

$A^*=[\hat{a}_{ij}]$

$\hat{a}_{ij}=\overline{a_{ji}}$

複素数

$\mathbb{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}\qquad \mathbb{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$

2つの列ベクトルの(標準)内積

${}^t\mathbb{a}\mathbb{b}=[a_1\ a_2]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$

$a = u + iv$　　$i = \sqrt{-1}$

u, v: 実

のとき

きょう やく

$\bar{a} = u - iv$　　(複素共役)

complex conjugate

やく

共軛

くびき

$$AE = EA = A$$

問題

$(A-2E)(A-E)$

$\parallel$

2 次正方行列 A で

$$A^2 - 3A + 2E = O \quad (*)$$

を満たすものをすべて求めなさい.

$A = 2E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (*)$

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(*) \Leftrightarrow$ ・$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; $a+d=3$, $ad-bc=2$

or

・$A=E$, $A=2E$

2次元の目的は (4-2)

問題 2-2

問題

行列 A, B の積が定義できるとき，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

$A: m \times k$, $B: k \times l$, $AB: m \times l$

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $AB = [c_{ij}]$

${}^tA = [\hat{a}_{ij}]$, ${}^tB = [\hat{b}_{ij}]$, ${}^t(AB) = [\hat{c}_{ij}]$

$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$

$\hat{c}_{ij} = c_{ji} = \sum_s a_{js} b_{si} = \sum_s b_{si} a_{js} = \sum_s \hat{b}_{is} \hat{a}_{sj} = ({}^tB\,{}^tA)$ の ij 成分