線形代数学第一 (LAS.M102-10)

正方行列

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/04/18

正則行列・逆行列

テキスト 15 ページ

正方行列 $m \times m$

square matrix

$E_m = E$: 単位行列 $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

1 the identity matrix

$AE = EA = A$

inverse matrix

Aの逆行列

$X = A^{-1}$

一意

定義 $AX = XA = E$ をみたす X が存在するとき

Aを正則という regular matrix

not 正則 (非正則, 特異).

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　　$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 天下り とおくと

$$AX = XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

したがって　Aは正則で　$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.　他にないの?　一意性

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: 非正則

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$: 非正則　め　や

零行列でなくても
非正則な行列
がある。

（第3章）

$$AX = E \Rightarrow XA = E$$

（あとで示す）

正方行列の性質

テキスト 17 ページ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mm} \end{bmatrix}$$

trace (跡)

- $A = [a_{ij}]$: m次正方行列

$\mathrm{tr}\, A =$ A の対角成分の和

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ii} \qquad (\text{スカラ})$$

問題 3-1

問題

実数を成分とする行列 A が $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$ を満たすならば，A は零行列である．

$A : m \times k$　　　${}^tA : k \times m$

${}^tAA : k \times k$　正方行列

$\mathrm{tr}({}^tAA) = 0 \Longrightarrow A = O$

$$A^k = O$$

問題

nilpotent

正方行列 A がべき零（冪零；テキスト 17 ページ）ならば $E-A$ は正則行列である．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = O$$

$$AX = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A は非正則

Hint

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

Fact 冪零 ⇒ 非正則

∵ 正則とすると $AX = E$ となる X がある。

- 冪零なので $A^k X = O$
- そうなる最小の k をとる。$A^{k-1} \neq O$
- $AX = E$ の両辺に左側から A^{k-1} をかけると

$$A^{k-1}AX = A^{k-1}E \quad \therefore \underbrace{\overset{O}{A^{k}}X}_{O} = \overset{\neq O}{A^{k-1}}$$

□

問題 3-3

2次の場合

問題

cofactor matrix
Aの余因子行列

tilde

2 次正方行列 A に対して $\widetilde{A} := (\operatorname{tr} A)E - A$ と定めると

左辺を右辺によって定義する

$$\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = (\det A)E,$$

ただし $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ に対して $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Aの determinant

とくに $\det A \neq 0$ なら A は正則で, $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}.}$

(証)
一般には
ワクザツ

☆ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ad - bc \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に

締切：4 月 20 日 10:00