

線形代数学第一 (LAS.M102-10)

正方行列

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

[http:](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/)

[//www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/)

東京工業大学

2022/04/18

正則行列・逆行列

テキスト 15 ページ

正方行列 $m \times m$

inverse matrix

square matrix

A の逆行列

$$X = A^{-1}$$

注意

1

$E_m = E$: 単位行列
the identity matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$AE = EA = A$$

定義

$$AX = XA = E \quad E \text{ かつ } X \text{ が存在するとき}$$

A は正則といふ regular matrix

^逆正則 (非正則, 特異)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{天下り} \\ \text{と不 \leq と} \end{matrix}$$

$$AX = XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

【 $n=2$ 】
 Aは正則 ⇔ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 他は? a!
一意性

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{非正則}$$

零行列 2×2 非正則
 非正則 1×1 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} : \text{非正則} \quad \textcircled{\text{あ}} \quad \textcircled{\text{や}}$$

かあり。

(第3章)

$$AX = E \Rightarrow XA = E$$

(あと2問あり)

正方行列の性質

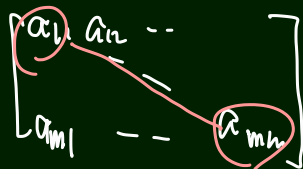
テキスト 17 ページ

trace (跡)

- $A = [a_{ij}]$ m 次正方行列

$\text{tr } A = A$ の対角成分の和

$$= \sum_{i=1}^m a_{ii} \quad (7.03)$$



問題 3-1

問題

実数を成分とする行列 A が $\text{tr}({}^tAA) = 0$ を満たすならば、 A は零行列である。

$$A : m \times k \qquad {}^tA = k \times m$$

$${}^tAA : k \times k \quad \text{正方行列}$$

$$\underline{\text{tr}({}^tAA) = 0 \Rightarrow A = 0}$$

問題 3-2

$$A^R = 0$$

問題

nilpotent

正方行列 A がべき零 (冪零; テキスト 17 ページ) ならば $E - A$ は正則行列である。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = 0$$

$$AX = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A は非正則

Hint

$$\frac{1}{1-x}$$

$$\geq 1 + x + x^2 + \dots$$

Fact 零変 \Rightarrow 非正則

① 正則の場合 $AX = E$ の解 X が
ある。

・ 零変の場合 $A^T X = 0$

・ 零変の場合 $A^{k-1} \neq 0$

・ $AX = E$ の両辺に A^{k-1} を
かかると

$$A^{k-1} AX = A^{k-1} E \quad (\because) \quad \underbrace{A^k X}_{0} = \underbrace{A^{k-1} E}_{\square}$$

問題 3-3

2次の場合

cofactor matrix

Aの余因子行列

問題

2次正方行列 A に対して $\tilde{A} := (\text{tr } A)E - A$ と定めると

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \underline{(\det A)}E,$$

trace と trace の反対逆行列

ただし $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ に対して $\underline{\det A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Aの determinant

とくに $\det A \neq 0$ なら A は正則で、 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$. (3章)

★ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

一般に
逆行列

課題

- ▶ 講義資料や講義の誤りの指摘
- ▶ 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に
締切：4月20日 10:00