線形代数学第一 (LAS.M102-10)

正方行列・連立一次方程式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/04/22

問題 2-1

A: 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2E = O$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2E = \begin{bmatrix} a^2+bc-3a+2 & b(a+d)-3b \\ c(a+d)-3c & d^2+bc-3d+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4つの方程式

$$\begin{cases} a^2+bc-3a+2=0 \\ d^2+bc-3d+2=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} b(a+d-3)=0 \\ c(a+d-3)=0 \end{array}$$

$$\begin{cases} a^2+bc-3a+2=0 & (1) \\ d^2+bc-3d+2=0 & (2) \end{cases}$$

$b(a+d-3)=0 \quad 3$

$c(a+d-3)=0 \quad 4$

$3: \quad b=0 \quad$ or $\quad a+d=3 \;; \quad 4: \quad c=0 \quad$ or $\quad a+d=3$

• $b=0 \Rightarrow (1)\ (2) \quad a^2-3a+2=0 \quad d^2-3d+2=0$

$a=1,\ 2 \qquad d=1,\ 2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pending}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ * & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a+d \neq 3 \Rightarrow c=0$$

• $c=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+bc-3a+2=0 & (1) \qquad \cancel{b}(a+d-3)=0 \\ d^2+bc-3d+2=0 & (2) \qquad \cancel{c}(a+d-3)=0 \end{cases}$$

$a+d=3$

$ad-bc=2$

$b\neq 0,\ c\neq 0 \Rightarrow a+d=3$ 実質2本

∞^2

自由度 2

$\begin{pmatrix} a & \\ b & \end{pmatrix}$ $c \to a$

$$\begin{array}{rl} (1) & a^2+bc-3a+2=0 \\ -)\ (2) & d^2+bc-3d+2=0 \\ \hline & (a-d)\underbrace{(a+d)}_{3}-3(a-d)=0 \end{array}$$

自明な式

(1) + (2)

$$a^2+d^2+2bc-3(a+d)+4=0$$

$$\underbrace{(a+d)^2}_{9}\underbrace{-3(a+d)}_{-9}\underbrace{+4}_{+4}-2ad+2bc=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ad-bc=2}$$

連立1次方程式

- n個の未知数の1次関係式
- n本 答かきまる？

実値何本？

↓

行列のrank

行列式 …

対角行列

- 対角行列は可換

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n b_n \end{bmatrix} = BA = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n a_n \end{bmatrix}$$

数の積の可換性

点々は気持ちわるいという人もいる？

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} = [\alpha_{ij}] \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix} = [\beta_{ij}]$$ とおく.

$AB = [\gamma_{ij}]$ を求めたい.

Kronecker's delta
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $\alpha_{ij} = \begin{cases} a_i = a_j & (i = j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = a_i \delta_{ij}$
- $\beta_{ij} = b_i \delta_{ij}$

$$\gamma_{pq} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{pi} \beta_{iq} = \sum_{i=1}^{n} a_p \delta_{pi} \underline{b_i \delta_{iq}}$$

i=qのみ

$$= \sum_i a_p \delta_{pi} \underline{b_q \delta_{iq}} = a_p b_q \sum_i \delta_{pi} \underline{\delta_{iq}}$$

$$\delta_{iq} = \begin{cases} 1 & i = q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= a_p b_q \delta_{pq}$$

$$= a_p \underset{(q)}{b_p} \delta_{pq}$$

転置行列

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

$A = [a_{ij}]$ $m \times k$ 型

$B = [b_{ij}]$ $k \times n$ 型

${}^tA = [\hat{a}_{ij}]$ とおくと $\hat{a}_{ij} = a_{ji}$

${}^tB = [\hat{b}_{ij}]$ 〃 $\hat{b}_{ij} = b_{ji}$

$AB = [c_{ij}]$, ${}^t(AB) = [\hat{c}_{ij}]$

とおくと

$$\hat{c}_{ij} = c_{ji} = \sum_{l=1}^{k} a_{jl} b_{li}$$

$$= \sum \hat{a}_{lj} \hat{b}_{il} = \sum_{l=1}^{k} \hat{b}_{il} \hat{a}_{lj}$$

$= {}^tB\,{}^tA$ の ij 成分.

$\hat{a}$ a-hat

$\tilde{a}$ a-tilde

$\bar{a}$ a-bar

問題 3-1

$A = [a_{ij}]$: $m \times k$　　${}^tAA$: $k \times k$ 型

問題

実数を成分とする行列 A が $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$ を満たすならば，A は零行列である．

trace

${}^tA = [\hat{a}_{ij}]$ とおくと　$\hat{a}_{ij} = a_{ji}$

$(\overline{{}^tA}A) = A^*A$

$$\left({}^tAA \text{ の } (i,j) \text{ 成分}\right) = \sum_{l=1}^{m} \hat{a}_{il} a_{lj} = \sum_{l=1}^{m} a_{li} a_{lj}$$

$$\mathrm{tr}\,{}^tAA = \sum_i \left\{ {}^tAA \text{ の } (i,i) \text{ 成分} \right\}$$

$$= \sum_i \sum_l a_{li} a_{li} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{m} (a_{li})^2 = \text{成分の2乗和}$$

$$\geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{li} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 1 \cdots k \\ l = 1 \cdots m \end{array} \right)$$

問題 3-2

A: given　$AX = XA = E$
となる X が存在するとき，A: 正則；$X = A^{-1}$

問題

正方行列 A がべき零ならば $E - A$ は正則行列である．

$\boxed{A^k = O}$

$\because$ $X = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$

とおくと

$(E-A)X = X(E-A)$
$= E$

$\left(\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right.$ $\left. 0 < x < 1\right)$

$=$ そうする X は唯一（一意性）

- $AX = E$，$YA = E$
$\Rightarrow X = Y$
$(\because)$ $Y = YE = YAX$
$= (YA)X = X$

$AX = E$ なら自動的に
$XA = E$（3章）

m次 ⇒ けっこうめんどくさい

8章（使わない）

問題

2次正方行列 A に対して $\widetilde{A} := (\mathrm{tr}\,A)E - A$ と定めると

前期 2章

$$\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = (\det A)E,$$

ただし $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ に対して $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

とくに $\det A \neq 0$ なら A は正則で， $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$