# 線形代数学第一 (LAS.M102-10)

## 正方行列・連立一次方程式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/04/22

# 逆行列

テキスト 15 ページ

（一般次数の逆行列の公式　3章
　　求め方　2章）

$AX = B$ をみたす $X$ を求めよ。

$AX = 1$

$XA = B$

$\Rightarrow X = BA^{-1}$

数　$X = \frac{B}{A}$　$(A \neq 0)$

行列ではこうかかない。

A：正方行列　とくに正則（$A^{-1}$ が存在）：$X = A^{-1}B$

∵ $AX = B$ に左から $A^{-1}$ をかけると $\underbrace{A^{-1}A}_{=E}X = A^{-1}B$

零因子　$AB=0$　$A\neq 0$, $B\neq 0$

となる $A, B$ を(特に明示)零因子という

- $AB=0$　$A$: 正則

$\Rightarrow B=0$

$\because$ $B=A^{-1}0$

- $AB=0$　$B$: 正則

$\Rightarrow A=0$　$\because$ $A=0B^{-1}$

---

$A, B$: 正方行列　$AB=0$, $A\neq 0$　$B\neq 0$

$\Rightarrow A, B$ は非正則

# 連立一次方程式

テキスト 30 ページ

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} ; \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

係数行列

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases} ; \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}}$$

係数行列

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

Aが正則なら

$$\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$$

☆ $A^{-1}$ を求めるのは一般ルームスピ

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y = a \\ x - y + z = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \cancel{x} - 3y + 2z = a \\ \cancel{x} - 3y + 2z = b \end{cases}$$

$a \neq b$ のとき
解はない

$a = b$ のとき
3本目がムダ
答は無数に!

例
$a = b = 0$ のとき

$$\boxed{\begin{cases} x = -\frac{1}{3}t \\ y = \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}}$$

$y = \frac{2}{3}z$

$x = -2y + z$
$= -\frac{1}{3}z$

- 知的アルゴリズムに消去を行う
- 解の自由度をはかる方法

階数

# 問題 4-1

## 問題

次の連立 1 次方程式をときなさい：

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

# 問題 4-2

## 問題

次の連立一次方程式をときなさい：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (a+4)x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + ax_2 - 2x_3 = 2a+2 \end{cases}$$