

線形代数学第一 (LAS.M102-10)

連立一次方程式

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

[http:](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/)

[//www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/)

東京工業大学

2022/04/25

複数の未知数

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{array} \right.$$

複数の未知数
(未知数の
一次式)

非同次項

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

未知

- ▶ A: 係数行列
- ▶ [A, b]: 拡大係数行列

連立一次方程式のとけ方

「掃き出し法」

線形代数に出てくる重要な概念

実際の計算は連立一次方程式を解く

連立一次方程式 (1)

単位行列

$$\textcircled{A}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ x_3 = b_3 \\ x_4 = b_4 \end{array} \right.$$

とっつき!

★ 与えられた方程式
(1)の系(条件(行列))を同値

変形して、 x の形に持ってこよう
とっつき

連立一次方程式 (2)

$$\triangleright [A, b] = \begin{array}{cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & b_4 \end{array}$$

階級(77) 15点

$$Ax = b$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}$$

AND

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_5 = b_1 \\ x_4 + 2x_5 = b_2 \\ x_6 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$$

$b_4 \neq 0$ ならば 4番の式
 は成り立たず、解なし

\downarrow
 解なし

$$x_2 + 2x_3 - x_5 = b_1$$

$$x_4 + 2x_5 = b_2$$

$$x_6 = b_3$$

$$0 = \cancel{b_4} = 0$$

$$b_4 = 0$$

このとき 4番の式は

あってもなくてもいい

(自明の式)

方程式は 3 個だけ

$$x_2 = -2x_3 + x_5 + b_1$$

$$x_4 = -2x_5 + b_2$$

$$x_6 = b_3$$

3つくらゐ

パラメータ p あり

自由変数 x_3, x_5 は b_1, b_2 によって決まる

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ -2c_3 + c_5 + b_1 \\ c_3 \\ -2c_5 + b_2 \\ c_5 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

c_1, c_3, c_5 は 3 変数

階段行列

テキスト 38 ページ

係数行列が階段行列ならば
段に対応する λ 以外の λ を
固有値の数とし 冪乗式は λ と 1 である

(絶対値が異なる
冪乗式は異なる)

- あるいは λ に冪乗式に同値変換を施して
係数行列を階段行列にする ← 帰法