線形代数学第一 (LAS.M102-10)

連立一次方程式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/04/25

連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

連立一次方程式

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1+4x_2+3x_3+2x_4= & 0 \quad ① \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4= & 3 \quad ② \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4= & -2 \quad ③ \\ 4x_1+x_2+2x_3+2x_4= & 1 \quad ④ \end{array}\right.$$

〇 ×

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

拡大係数行列

②＋(−2)×①

同値変形

左側の未知数から順に消去していく

第一列

〇を含む行をつかって他の行の係数を0にする

$$
\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

(2行目) + (−2) × (1行目)

同値変形

(k行) + α (l行)

軸 pivot

$$
\begin{bmatrix}
1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\
0 & -5 & -5 & 0 & 3 \\
3 & 2 & 4 & 1 & -2 \\
4 & 1 & 2 & 2 & 1
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\
0 & -5 & -5 & 0 & 3 \\
0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\
4 & 1 & 2 & 2 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$(3\text{行}) + (-3) \times \underline{(1\text{行})}$$

変えない

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -15 & -10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

(4行) + (−4) × (1行)

1列目の掃き出し完了

連立一次方程式

やり方はひと通りでない

$$
\begin{bmatrix}
1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\
0 & -5 & -5 & 0 & 3 \\
0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\
0 & -15 & -10 & -6 & 1
\end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix}
1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\
0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\
0 & -15 & -10 & -6 & 1
\end{bmatrix}
$$

$\left(-\frac{1}{5}\right)$(2行目)

$\alpha \times$ (k行) $\quad (\alpha \neq 0)$

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -15 & -10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -15 & -10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

(1行) + (−4)(2行)

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -15 & -10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -8 \\ 0 & -15 & -10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

(3行) + 10 × (2行)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -8 \\ 0 & -15 & -10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -8 \end{bmatrix}
$$

(4行) + 15×(2行)

2列目完了

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{5} \times$ (3行)

連立一次方程式

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\
0 & 0 & 5 & -6 & -8
\end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\
0 & 0 & 5 & -6 & -8
\end{bmatrix}
$$

連立一次方程式

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\
0 & 0 & 5 & -6 & -8
\end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\
0 & 0 & 5 & -6 & -8
\end{bmatrix}
$$

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-1

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

連立一次方程式

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}.
$$

$= E$

とけた♡

もとの方程式 $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -\frac{8}{5} \\ x_4 = 0 \end{cases}$

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcr} x_1 & = & \frac{4}{5} \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & -\frac{8}{5} \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1+4x_2+3x_3+2x_4= 0 \\ 2x_1+3x_2+\ x_3+4x_4= 3 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+\ x_4=-2 \\ 4x_1+\ x_2+2x_3+2x_4= 1 \end{array} \right.$$

連立一次方程式：問題 4-1

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

連立一次方程式：問題 4-1

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -15 & -10 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

連立一次方程式：問題 4-1

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -15 & -10 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & -3 & -2 & -1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

連立一次方程式：問題 4-1

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & -3 & -2 & -1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

連立一次方程式：問題 4-1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \end{bmatrix} \to \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同じ

t

x_4：任意とおいてみ　自由

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = \frac{4}{5} \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -t + \frac{4}{5} \\ x_2 = -t + 1 \\ x_3 = t - \frac{8}{5} \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -t + \frac{4}{5} \\ x_2 = -t + 1 \\ x_3 = t - \frac{8}{5} \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{8}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

連立一次方程式：問題 4-2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & (a+4)x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & ax_2 & - & 2x_3 & = & 2a+2 \end{array}\right.$$

連立一次方程式：問題 4-2

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & a+4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 & 2a+2 \end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix} 1 & 2 & a+4 & 2 \\ 0 & 1 & a+3 & 1 \\ 0 & a-4 & -2a-10 & 2a-2 \end{bmatrix}
$$

$\times(-1)$

$$
\begin{matrix} 1 & 2 & a+4 & 2 \\ 0 & -1 & -a-3 & -1 \\ 0 & a-4 & -2a-10 & 2a-2 \end{matrix}
$$

連立一次方程式：問題 4-2

(1行) − 2×(2行)

(3行) − (a−4)×(2行)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a+4 & 2 \\ 0 & 1 & a+3 & 1 \\ 0 & a-4 & -2a-10 & 2a-2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & 0 \\ 0 & 1 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-(a+2)(a-1)} & a+2 \end{bmatrix}$$

$-2a-10-(a-4)(a+3)$

$a \neq 2$ & $a \neq 1$

⇒ はき出しできる

連立一次方程式：問題 4-2

$a \neq 1$ かつ $a \neq -2$ のとき：

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -a-2 & 0 \\
0 & 1 & a+3 & 1 \\
0 & 0 & \underline{-(a\cancel{+2})(a-1)} & a\cancel{+2}
\end{bmatrix}
$$

$$
\to
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -a-2 & 0 \\
0 & 1 & a+3 & 1 \\
0 & 0 & 1 & \underline{\underline{\frac{-1}{a-1}}}
\end{bmatrix}
$$

$a \neq 1$ かつ $a \neq -2$ のとき：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & 0 \\ 0 & 1 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} \end{bmatrix}$$

(1行) + (a+2)×(3行)

(2行) − (a+3)×(3行)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a+2}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2(a+1)}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a+2}{a-1} \\ x_2 = \dfrac{2(a+1)}{a-1} \\ x_3 = \dfrac{-1}{a-1} \end{cases}$$

$a = -2$ のとき：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & 0 \\ 0 & 1 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-(a+2)(a-1)} & \underline{a+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_2 = 1 - x_3$$

$$\uparrow$$

$$t$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{bmatrix}$$

連立一次方程式：問題 4-2

$a = 1$ のとき：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & 0 \\ 0 & 1 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

3

$0 = 3$

解：なし

行基本変形 ： 連立1次方程式の同値変形

テキスト 31 ページ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

(R1) sr_i 行

(R2) $r_i + sr_j$ $i \neq j$

(R3) $r_i \leftrightarrow r_j$

☆ 任意の行列は行基本変形をくりかえして階段行列にできる。 何通りもある

☆ できあがった階段行列は、基本変形のしかたによらず一通り。

行列の階数 (rank)

行基本変形をして階段行列に変形したときの階段行列の0でない行の数.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階数 2

連立方程式　$Ax = b$　　A: $m \times n$ 型

x: n 次列ベクトル

$\tilde{A} = [A \quad b]$: 拡大係数行列

$\tilde{A} \rightsquigarrow [B, C]$
行基本変形

B: 階段行列

Aの階数 $=$ rank $A = r$ とすると

$$B = \begin{bmatrix} \quad * \quad \\ 0 \ \cdots \ 0 \\ 0 \ \cdots \ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad C = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\neq 0 \Rightarrow$ 解なし

rank $A \lneqq$ rank $\tilde{A}$

$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,\tilde{A}$ のとき

解は $(k - r)$ 個のパラメータをふくむ.

問題 5-1

問題

左辺を右辺により
定義する

行列

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

基本ベクトル

と 4 つの列ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x e

に対して $A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j$ を満たす列ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ を求めなさい.