線形代数学第一 (LAS.M102-10)

階数・逆行列

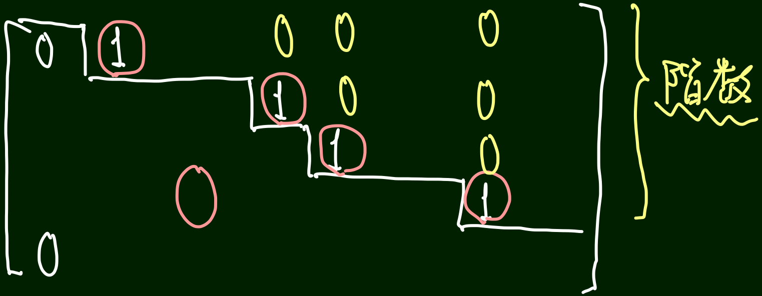
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/02

階段行列と連立一次方程式

- 階段行列：テキスト 38 ページ
- 係数行列が階段行列であるような連立一次方程式



連立一次方程式 $\overset{m\times k}{A}\,\overset{k\times 1}{x} = \overset{m\times 1}{b}$ $\qquad \overset{m\times(k+1)}{[A \;\; b]} = \tilde{A}$

係数行列

local な記号

A が階段行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 単位行列 $$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \left(x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$Ax = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

解 $\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ x_3 = b_3 \end{cases}$ 解は唯一

$Ax = b$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \leftarrow \text{任意}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{rank } 2}$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_5 = b_1 & ① \\ x_4 - 2x_5 = b_2 & ② \\ 0 = \cancel{b_3}\ 0 & ③ \end{cases}$$

$\boxed{b_3 \neq 0}$

③が満たされない

解なし

$\boxed{b_3 = 0}$

③はあってもなくてもよい

方程式 2本 → ③(=5−2)個の任意定数をふくむ

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_5 = b_1 & (1) \\ x_4 - 2x_5 = b_2 & (2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_1 \\ x_3 &= t_3 \\ x_5 &= t_5 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{cases} x_2 = -2t_3 + t_5 + b_1 \\ x_4 = 2t_5 + b_2 \end{cases}$$

$$x = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

行列の階数と連立一次方程式の解

$\boxed{A: \text{階段}}$

方程式 $\underset{(m\times k)}{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $\quad \hat{A} = [A, \boldsymbol{b}]$

- $\operatorname{rank} A = r \ (\leqq m)$ のとき
  - $\boldsymbol{b}$ の $(r+1)$ 行以下の成分がすべて 0 のとき　解は $(k-r)$ 個の任意定数をふくむ解
  - otherwise　解なし.

行基本変形と基本行列

"加減法" "消去法" に使える操作

- 基本行列：テキスト 35 ページ.
- 基本行列は正則行列である.
- 行列に基本行列を左からかけることと行基本変形が対応している.

3つの operations: 拡大係数行列に施しても連立方程式が変わらない (同値)

基本行列 1/3

$$P_i(s)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1/s & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$

定義

$$\overset{(n)}{P_i(s)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & s & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i \text{行目}$$

$s \neq 0$ のとき $P_i(s)$ は正則

$P_i(s)B = \left(B\text{の第}i\text{行を}s\text{倍した行列} \right)$ 左からかける

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & S & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \left[\mathbf{b}_1 \,\middle|\, \mathbf{b}_2 \,\middle|\, \mathbf{b}_3 \,\middle|\, \mathbf{b}_4 \right]$$

← あたかも自数のようにして計算して問題ない。

$$P_2^{(4)}(S) = \left[P\mathbf{b}_1 \;\; P\mathbf{b}_2 \;\; P\mathbf{b}_3 \;\; P\mathbf{b}_4 \right]$$

§1.5 行列の分割のとこでやったケース

= 2行目だけをS倍

$$P_{ij}(s) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & \downarrow j & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots\ s & \cdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{array}\right] & \leftarrow i \end{array}$$

sが何であっても正則

$$P_{ij}(s)^{-1} = P_{ij}(-s)$$

$P_{ij}(s)B =$ (Bのi行にj行のs倍を加えた行列)

基本行列 3/3

正則

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$P_{ij}B =$ (B の i行 と j行を いれかえた もの)

階段化定理

- 行階~~段~~化定理：テキスト 40 ページ，定理 2.2

簡約

掃き出し法

階段行列

$A \longmapsto B$

行基本変形

基本変形のしかたによらず ひとつとおり

$B = PA$

1つずつの変形は左から正則行列をかける

正則行列