線形代数学第一 (LAS.M102-10)

階数・逆行列

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/02

正則行列と逆行列

A: 正方行列

単位行列

$$A が正則 (\text{regular}) \overset{\text{def}}{\iff} AX = XA = E となる X がある$$

- このような X は存在するならば一意 (唯ひとつ) unique
  A の逆行列 inverse A^{-1}

<u>Lemma</u> (補題) 補助的な定理

A, B 正則 $\Rightarrow$ AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\because$ $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_{E})B = B^{-1}B = E$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = E$ $\square$

問題 5-1

問題

行列

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$A x_j = e_j$ $(j = 1, \cdots 4)$

と 4 つの列ベクトル

$$\underbrace{e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{基本ベクトル}}$$

($\mathbb{R}^4$ の標準基底)

に対して $A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j$ を満たす列ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ を求めなさい.

問題 5-1

$$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1, \qquad A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2, \qquad A\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{e}_3, \qquad A\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{e}_4$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

とき方

$$[A, \boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \ \boldsymbol{e}_3 \ \boldsymbol{e}_4] \xrightarrow{\text{はき出し}} [E, \boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_2 \ \boldsymbol{x}_3 \ \boldsymbol{x}_4]$$

rank 4の階段行列 $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$$[Ax_1 \quad Ax_2 \quad Ax_3 \quad Ax_4] = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4]$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$A[\overbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4}^{X}] \qquad\qquad E$$

$$\boxed{AX = E}$$

$\boxed{A : n \times n}$

rank $A < n$

$\Rightarrow$ 正則でない

$\boxed{\text{主張}}$

claim

$$XA = E \Rightarrow X = A^{-1}$$

逆行列の求め方

$$[A \quad E] \xrightarrow{\text{はき出し}} [E \quad X]$$

rank $A = n$

となったら $X = A^{-1}$

主張の証明

Aに掃き出しを施してEがえられること

掃き出し：基本行列をAに左からくり返しかけていく

$$PA = E \quad (P\text{は正則})$$

$$[A, E] \xrightarrow{\text{掃き出し}} [PA(=E) \quad X]$$

$$= P[A \quad E]$$

$$\therefore X = PE = P$$

$$\therefore XA = E \quad \square$$

行列の正則性と逆行列の計算

テキスト 58 ページ，§2.6.

問題 6-1

問題

n 次正方行列 A に対して，n 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトルとする連立一次方程式（同次方程式・斉次方程式） homogenious

$$A\boldsymbol{x} = \boxed{\mathbf{0}} \qquad (*)$$

を考える．ただし $\mathbf{0}$ は零ベクトルである．

1. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ が (??) の解ならば，スカラ $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ に対して

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{x}_n$$

も $(*)$ の解であることを示しなさい．

2. A が正則ならば $(*)$ の解は零ベクトルのみであることを示しなさい．